

VISIT...

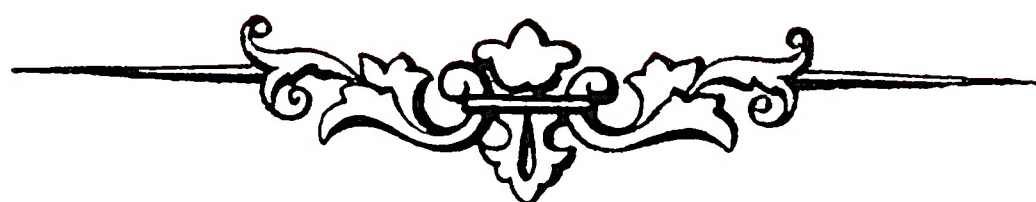
LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~



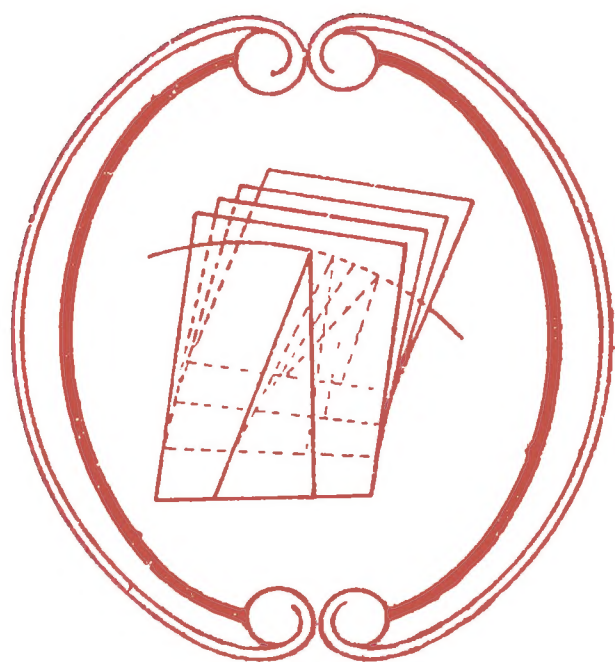
GASPARD MONGE
GEOMETRIE
DES DESCRIPTIVE



ГАСПАР МОНЖ НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПЕРЕВОД В. Ф. ГАЗЕ
КОММЕНТАРИИ И РЕДАКЦИЯ
ПРОФ. Д. И. КАРГИНА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
ЧЛЕНА КОРРЕСПОНДЕНТА АН СССР
Т. П. КРАВЦА



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1947

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*

Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук
СССР *П. Ф. ЮДИН*



НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ





П Р О Г Р А М М А²



Чтобы освободить французский народ от иностранной промышленной зависимости, в которой он до сих пор находился, надо прежде всего направить народное образование к познанию объектов, требующих точности, что было в полном пренебрежении до нашего времени, и приучить наших специалистов к пользованию всевозможными инструментами, предназначенными для того, чтобы вносить точность в работу и измерять ее степень: тогда потребители, поняв необходимость точности выполнения, начнут требовать ее в разных работах и соответственно их оценивать; и наши специалисты, привыкнув к точности с молодых лет, будут в состоянии ее достигнуть.

Во-вторых, надо расширить знание многих явлений природы, необходимое для прогресса промышленности, и воспользоваться для развития общего образования народа тем счастливым обстоятельством, что она имеет в своем распоряжении главные ресурсы, которые ей требуются.

Наконец, надо распространить среди наших специалистов знание способов, применяемых в искусствах,³ и знание машин, предназначенных для того, чтобы либо сократить ручную работу, либо внести в результаты работы больше однородности и точности; надо сознаться, что в этом отношении мы должны еще многое заимствовать у чужих народов.

Всем этим требованиям можно удовлетворить, только дав новое направление народному образованию.

Прежде всего нужно приучить пользоваться начертательной геометрией всех способных молодых людей как богатых, для того чтобы они были в состоянии употреблять свои капиталы с пользой — равно для себя и для государства, так и тех, у которых образование является единственным богатством, для того чтобы они могли увеличить цену своего труда.

Эта наука имеет две главные цели.

Первая — точное представление на чертеже, имеющем только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы.

С этой точки зрения — это язык, необходимый инженеру, создающему какой-либо проект, а также всем тем, кто должен руководить его осуществлением, и, наконец, мастерам, которые должны сами изготовлять различные части.

Вторая цель начертательной геометрии — выводить из точного описания тел все, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения. В этом смысле — это средство искать истину; она дает бесконечные примеры перехода от известного к неизвестному; и поскольку она всегда имеет дело с предметами, которым присуща наибольшая ясность, необходимо ввести ее в план народного образования. Она пригодна не только для того, чтобы развивать интеллектуальные способности великого народа и, тем самым, способствовать усовершенствованию рода человеческого, но она необходима для всех рабочих, цель которых придавать телам определенные формы; и именно, главным образом, потому, что методы этого искусства до сих пор были мало распространены или даже совсем не пользовались вниманием, развитие промышленности шло так медленно.

Народному образованию будет дано полезное направление, если наши молодые специалисты привыкнут применять начертательную геометрию к графическим построениям, необходимым во многих областях, и пользоваться ею для построе-

G É O M É T R I E

D E S C R I P T I V E.

L E Ç O N S

D O N N É E S A U X É C O L E S N O R M A L E S ,

L' A N 3 D E L A R É P U B L I Q U E ;

P A R C A S P A R D M O N G E , de l'Institut national.

P A R I S ,

B A U D O U I N , Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut
national

A N V I I .

Титульный лист „Начертательной геометрии“ Монжа.
Издания VII года Республики).

ния и определения элементов машин, при помощи которых человек, используя силы природы, оставляет за собой только работу разума.

Не менее полезно распространять знания о явлениях природы, которые тоже можно заставить служить на пользу дела.

Очарование, сопровождающее науку, может победить свойственное людям отвращение к напряжению ума и заставить их находить удовольствие в упражнении своего разума, — что большинству людей представляется утомительным и скучным занятием.

Итак, в Нормальной школе должен быть курс начертательной геометрии.

Но так как мы не имеем до сих пор в этой области науки ни одного хорошо написанного элементарного труда, — потому ли, что наши ученые слишком мало ею интересовались, или потому, что она применялась туманным образом лицами недостаточно образованными, не умевшими излагать результаты своих размышлений, — простой устный курс был бы абсолютно бесцельным.

Лекционное изложение методов начертательной геометрии необходимо сопровождать практическими занятиями.

Поэтому ученики должны упражняться в графических построениях по начертательной геометрии. В графических искусствах применяются общие методы, с которыми можно освоиться, пользуясь только циркулем и линейкой.

Среди различных возможных применений начертательной геометрии имеются два замечательных как по своим обобщениям, так и по своей изобретательности: это построение перспективы и точное определение теней на рисунке. Эти два вопроса могут быть рассмотрены как дополнение к искусству описания предметов.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

Предмет начертательной геометрии⁴

1. Начертательная геометрия преследует две цели: во-первых, дать методы для изображения на листе чертежа, имеющего только два измерения, а именно длину и ширину, любых тел природы, имеющих три измерения — длину, ширину и высоту, при условии, однако, что эти тела могут быть точно заданы.

Во-вторых, дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из их формы и их взаимного расположения.

Сначала мы изложим полученные путем длительного опыта способы, составляющие содержание первой задачи: затем дадим методы выполнения второй.

Соображения, по которым определяется положение точки в пространстве. О методе проекций

2. Поскольку все тела природы могут быть рассмотрены как состоящие из точек, нашим первым шагом должно быть указание способа определения положения точки в пространстве.

Пространство не имеет границ: все его части совершенно подобны, нет ничего, что бы их характеризовало, и ни одна

из них не может служить объектом сравнения для указания положения точки.

Поэтому для определения положения точки в пространстве необходимо относить это положение к некоторым другим элементам, отличным от частей заключающего их пространства, причем положение самих этих элементов должно быть известно как тому, который дает определение, так и тому, кто хочет его понять; а для того чтобы самый способ мог стать удобным для применения, надо, чтобы эти элементы были сколь возможно просты и чтобы их положение было наиболее легко понятно.

3. Из всех простых элементов мы выберем те, которые представляются самыми удобными для определения положения точки; поскольку наиболее простым элементом в геометрии является точка, мы исследуем, к какому ходу рассуждений приведет нас определение положения точки посредством некоторого числа других точек, положение которых известно; для ясности изложения обозначим эти заданные точки последовательными буквами A , B , C и т. д.

Предположим сначала, что определение положения точки включает в себе условие, что она находится на расстоянии одного метра от заданной точки A .

Известно, что поверхность шара обладает тем свойством, что все ее точки находятся на равном расстоянии от его центра. Следовательно, эта часть определения выражает, что точка, которую мы хотим определить, обладает тем же свойством, что и все точки поверхности шара с радиусом, равным одному метру и с центром в точке A . Но точки, лежащие на поверхности шара, являются единственными во всем пространстве, обладающими этим свойством, так как все точки пространства, лежащие вне этой поверхности, удалены от центра более чем на один метр, а все точки, заключенные между поверхностью и центром, находятся от него на расстоянии меньшем, чем один метр. Поэтому все точки поверхности

шара не только обладают указанным свойством, но они являются единственными, обладающими им; следовательно, наше определение выражает то, что искомая точка принадлежит к числу точек поверхности шара с радиусом, равным одному метру, и с центром в точке A . Этим самым она отличается от бесконечности других точек в пространстве; но она еще ничем не выделяется среди всех точек поверхности шара; для того чтобы отличить ее среди них, нужны еще другие условия.

Предположим далее, что, согласно определению положения точки, она должна находиться на расстоянии двух метров от второй известной точки B ; очевидно, что повторяя подобные же рассуждения для этого второго условия, мы найдем, что эта точка должна также принадлежать поверхности второго шара с радиусом, равным двум метрам и с центром в точке B . Так как эта точка должна находиться одновременно как на поверхности первого, так и на поверхности второго шара, то она не отличима теперь только от тех точек, которые являются общими для обеих поверхностей и принадлежат их пересечению; но из геометрии известно, что пересечение поверхностей двух шаров представляет собой окружность круга, центр которого лежит на прямой, соединяющей центры обоих шаров, и плоскость которого перпендикулярна этой прямой; итак, в силу требований обоих этих условий, вместе взятых, искомая точка фактически отличается от других точек, лежащих на поверхностях обоих шаров, и не может отличаться только от точек окружности круга, единственно подчиненных обоим изложенным условиям. Поэтому, для того чтобы отличить искомую точку, нужно еще третье условие.

Предположим, наконец, что эта точка должна еще находиться на расстоянии трех метров от третьей известной точки C . Это третье условие помещает ее в совокупность всех точек поверхности третьего шара с радиусом, равным трем метрам, и с центром в точке C . А так как мы уже видели, что искомая точка должна лежать на окружности круга, положение

которого известно, то, для того чтобы удовлетворить одновременно всем трем условиям, необходимо, чтобы она была одной из точек общих как для поверхности третьего шара, так и для окружности круга: однако известно, что окружность круга и поверхность шара могут пересекаться только в двух точках; итак, в силу всех трех условий наша точка отлична от всех других точек пространства и может быть только одной из двух таким образом определенных точек; если еще указать, с какой стороны эта точка расположена относительно плоскости, проходящей через три центра, она будет абсолютно определена и не может быть спутана ни с какой другой.

Мы видим, что, пользуясь для определения положения точки в пространстве ее расстояниями до других известных точек, число которых должно быть непременно три, мы оказываемся вовлеченными в рассуждения недостаточно простые, чтобы служить обоснованием для обычных методов.

4. Рассмотрим, к каким рассуждениям мы придем, если вместо того, чтобы относить точку к трем другим известным точкам, мы отнесем ее к трем прямым, положение которых задано.

Заметим сначала, что прямая линия никогда не должна рассматриваться ограниченной по длине, и что она может быть неопределенно продолжена в обоих направлениях.

Для простоты обозначим буквами A , B , C и т. д. прямые, которыми мы будем пользоваться.

Если, по определению, точка находится на расстоянии, например, одного метра от первой заданной прямой A , то это значит, что она принадлежит поверхности цилиндра с круговым основанием радиуса, равного одному метру, осью которого является прямая A и который не ограничен по длине в обоих направлениях; все точки такой поверхности, и притом только они единственные, удовлетворяют поставленному условию. Тем самым искомая точка отлична от всех точек пространства, лежащих вне поверхности цилиндра; она также

отлична от точек, находящихся внутри цилиндра, и может быть спутана только с точками на цилиндрической поверхности, для отличия ее от которых требуются дополнительные условия.

Предположим также, что искомая точка должна, кроме того, находиться на расстоянии двух метров от второй прямой B ; подобным же образом мы убеждаемся в том, что точка принадлежит поверхности второго цилиндра с круговым основанием, осью которого служит прямая B , а радиус основания равен двум метрам; она не отличима от других точек этой поверхности, если рассматривать только одно второе условие. Рассматривая совместно оба условия, мы видим, что точка должна находиться одновременно и на первой и на второй цилиндрических поверхностях: итак, она может быть только одной из точек, общих обеим поверхностям, т. е. одной из точек их взаимного пересечения. Линия, на которой должна находиться точка, будет иметь кривизну поверхности первого цилиндра и кривизну поверхности второго и относится к типу тех, которые называются *кривым* и *двойкой кривизны*.

Чтобы отличить рассматриваемую точку от всех других, принадлежащих этой кривой, нужно третье условие.

Предположим, наконец, что, согласно определению, искомая точка лежит на расстоянии трех метров от третьей прямой C .

Это дополнительное условие выражает, что точка принадлежит к числу точек поверхности третьего цилиндра с круговым основанием, с радиусом в три метра и прямой C , служащей осью: итак, в силу совместных трех условий, искомая точка должна быть одной из тех, которые являются общими для третьей цилиндрической поверхности и кривой двойкой кривизны, являющейся пересечением двух первых. Эта кривая, вообще говоря, может быть пересечена третьей цилиндрической поверхностью в восьми точках; поэтому, рассмотренные три условия приводят к заключению, что искомая точка должна быть одной из восьми определенных нами точек и что для более точного определения ее положения необходимо дать

еще несколько дополнительных условий наподобие тому, как мы поступили в случае опорных точек.

Мы видим, что рассуждения, с которыми мы встретились для определения положения точки в пространстве по известным расстояниям до трех заданных прямых, еще менее просты, чем рассуждения, вытекающие из условия расстояний до трех точек, и что они еще менее могут служить обоснованием для методов, которыми можно было бы часто пользоваться.

5. Из всех простых элементов, которые рассматривает геометрия, надо отметить прежде всего: 1) точку, не имеющую никаких измерений; 2) прямую линию, имеющую только одно измерение, и 3) плоскость, имеющую два измерения. Посмотрим, не проще ли было бы определять положение точки из известных расстояний до заданных плоскостей, нежели пользоваться ее расстояниями до точек или прямых линий.

Предположим, что в пространстве имеются не параллельные плоскости, положение которых известно и которые мы обозначим последовательно буквами A , B , C , D и т. д.

Если, согласно определению положения точки, она находится на расстоянии, например, одного метра от плоскости A , без уточнения — с которой стороны от этой плоскости она помещается, то тем самым выражено, что она лежит в одной из плоскостей, параллельных плоскости A и расположенных соответственно по обе стороны от нее на расстоянии одного метра: все точки на этих двух параллельных плоскостях удовлетворяют поставленному условию, и из всех точек пространства они являются единственными, ему удовлетворяющими.

Поэтому, чтобы отличить ту точку, положение которой мы хотим определить, от всех других точек на этих плоскостях, надо иметь еще другие условия.

Предположим далее, что искомая точка должна находиться на расстоянии двух метров от плоскости B , тем самым она помещается на одной из двух плоскостей, параллельных плоскости B , находящихся каждая на расстоянии двух метров

по обе стороны от этой плоскости. Чтобы удовлетворить одновременно обоим условиям, необходимо, чтобы искомая точка находилась в одной из двух плоскостей, параллельных плоскости A , а также в одной из двух плоскостей, параллельных плоскости B , и, следовательно, была бы одной из точек пересечения четырех плоскостей. Но пересечение четырех попарно параллельных заданных плоскостей представляет собой совокупность четырех прямых, положение которых также известно. Таким образом, при одновременном рассмотрении обоих этих условий, точка будет отлична не только от точек пространства вообще, но и от таковых, принадлежащих четырем плоскостям, и не выделяется только от точек, находящихся на этих четырех прямых. Наконец, если еще задано, что точка находится на расстоянии трех метров от третьей плоскости C , то она должна быть в одной из двух плоскостей, параллельных плоскости C и расположенных по обе стороны от нее на расстоянии трех метров. Следовательно, в силу всех трех условий, она должна находиться одновременно в одной из двух последних плоскостей и на одной из четырех прямых, являющихся пересечением четырех первых плоскостей; таким образом, она может быть только одной из точек, общих для одной из этих двух плоскостей и одной из четырех прямых. Но так как каждая из двух плоскостей имеет общую точку с каждой из четырех прямых, то имеется всего восемь точек в пространстве, удовлетворяющих одновременно трем поставленным условиям; поэтому, в силу всех вместе взятых трех условий, оказывается, что искомая точка может быть только одной из восьми определенных точек; дальнейшее уточнение возможно только при помощи некоторых дополнительных условий.

Например, если при указании расстояния до первой плоскости A , будет также указано, в каком направлении относительно этой плоскости должно быть измерено заданное расстояние, то вместо двух плоскостей, параллельных плоскости A , нам придется рассматривать только одну, именно рас-

положенную относительно нее с той стороны, в направлении которой измеряется расстояние. Подобным же образом, если указано, в каком направлении по отношению ко второй плоскости должно быть измерено расстояние, то одна из двух плоскостей, параллельных второй плоскости, исключается из рассмотрения, остается только одна плоскость, все точки которой удовлетворяют второму условию; подчиняясь обоим условиям, искомая точка уже не может больше находиться на одной из четырех прямых линий пересечения четырех попарно параллельных плоскостей, но только на пересечении двух плоскостей, т. е. на прямой линии, положение которой известно. Наконец, если указать также, с какой стороны точка должна быть расположена по отношению к третьей плоскости, то из двух плоскостей, ей параллельных, останется только одна, все точки которой удовлетворяют последнему условию; а чтобы удовлетворить одновременно всем трем этим условиям, искомая точка должна находиться на пересечении этой третьей плоскости с единственной прямой, являющейся пересечением двух первых. Таким образом, искомая точка не может быть больше спутана ни с какой другой в пространстве и, следовательно, будет вполне определена.

Итак, мы видим, что хотя плоскость является более сложным геометрическим элементом с точки зрения числа своих измерений, чем прямая, имеющая только одно, или точка, совсем не имеющая измерений, однако плоскость дает возможность более простого определения положения точки в пространстве, нежели точка или прямая; именно этим способом и пользуются обычно в применении алгебры к геометрии, где для нахождения положения точки принято определять ее расстояния до трех заданных плоскостей.

Но в начертательной геометрии, которая начала применяться гораздо раньше и значительно большим числом людей, и притом людей, время которых было дорого, методы еще более упростились; вместо того чтобы рассматривать три

плоскости, научились при помощи проекций ограничиваться рассмотрением только двух плоскостей.

6. Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Если мы имеем в пространстве две заданные плоскости и нам даны на каждой из них проекции точки, положение которой должно быть определено, то тем самым эта точка будет вполне определена.

Действительно, если из проекции точки на первой плоскости восстановить перпендикуляр к этой плоскости, то очевидно, что он пройдет через данную точку; подобным же образом, если из проекции точки на второй плоскости восстановить к ней перпендикуляр, он также пройдет через данную точку; следовательно, точка будет находиться одновременно на двух прямых, положение которых в пространстве известно; она будет единственной точкой их пересечения, и тем самым она будет вполне определена.

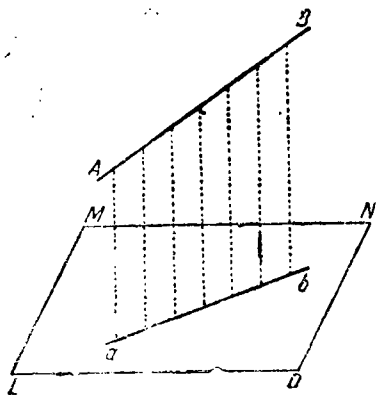
В последующих параграфах будут указаны способы легкого использования этого приема для применения только на одном листе чертежа.⁵

7. Фиг. 1. Если опустить перпендикуляры из всех точек неопределенной прямой⁶ линии AB , расположенной как угодно в пространстве на заданную плоскость $LMNO$, то все точки пересечения этих перпендикуляров с плоскостью будут находиться на другой неопределенной прямой ab , так как они все будут лежать в плоскости, проведенной через AB перпендикулярно к плоскости $LMNO$, и смогут встретить последнюю только по линии пересечения этих двух плоскостей, которая, как известно, есть прямая линия.

Прямая ab , проходящая таким образом через проекции на плоскость $LMNO$ всех точек другой прямой AB , называется проекцией прямой AB на эту плоскость.

Так как для определения положения прямой достаточно двух ее точек, то для построения проекции прямой достаточно построить таковые для двух ее точек, и прямая, проведенная через проекции этих точек, и будет искомой проекцией.

Отсюда следует, что если рассматриваемая прямая сама перпендикулярна к плоскости проекции, то ее проекция сведется к единственной точке, которая будет точкой пересечения прямой с плоскостью.



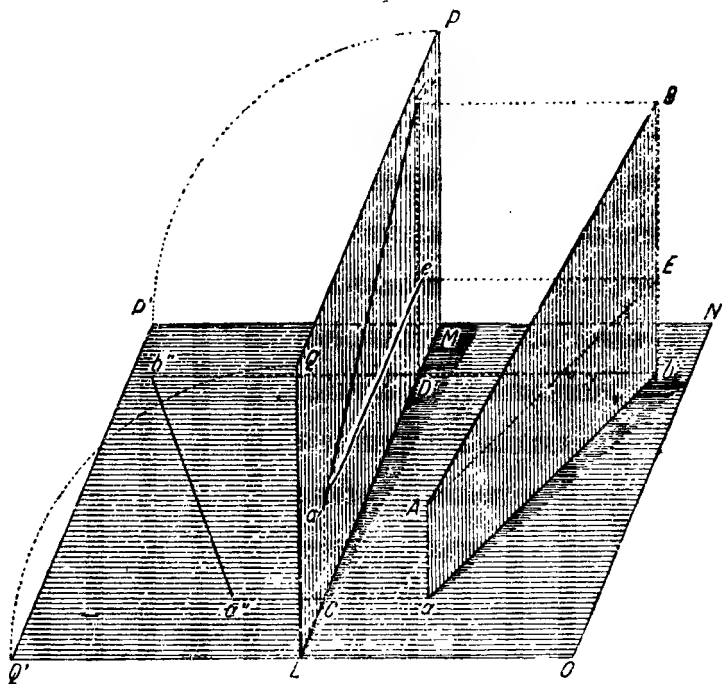
Фиг. 1.

Фиг. 2. Если даны проекции ab и $a'b'$ одной и той же случайной прямой AB на две не параллельные плоскости $LMNO$ и $LMPQ$, то эта прямая определена; ибо если построить плоскость, проходящую через одну из проекций ab перпендикулярно к $LMNO$, то эта плоскость, положение которой известно, непременно пройдет через прямую AB ; подобным

же образом, если построить плоскость, проходящую через другую проекцию $a'b'$ перпендикулярно к $LMPQ$, то эта плоскость, также известная, пройдет через прямую AB . Положение этой прямой, находящейся одновременно в двух известных плоскостях, т. е. в их пересечении, является вполне определенным.

8. Высказанное здесь не зависит от положения плоскостей проекций и имеет место, каков бы ни был угол, составляемый этими двумя плоскостями. Но если угол, составляемый обеими плоскостями проекций, будет очень тупым, то угол, составленный перпендикулярными к ним плоскостями, окажется очень острым; на практике же маленькие ошибки могут вызвать очень большую неточность в определении положения прямой.

Чтобы избежать этой причины неточности, плоскости проекций выбирают всегда перпендикулярными между собой, за исключением разве случаев, когда неперпендикулярные плоскости проекций представляют какие-либо упрощения.



Фиг. 2.

Кроме того, поскольку большинство специалистов,⁷ применяющих метод проекций, привыкло иметь дело с положением горизонтальной плоскости и направлением линии отвеса, они обычно предполагают, что из двух плоскостей проекций одна — горизонтальна, а другая — вертикальна.

Необходимость изображать на чертеже обе проекции на одном и том же листе, а также выполнять на нем все построения, привела специалистов к мысли вращать вертикальную

плоскость вокруг своего пересечения с горизонтальной плоскостью, как на шарнире, до совмещения с горизонтальной плоскостью, и строить проекции при таком совмещенном положении плоскостей.

Поэтому вертикальная проекция фактически всегда изображается в горизонтальной плоскости, и нужно постоянно помнить, что она должна быть поднята и поставлена на место путем поворота на четверть оборота вокруг линии пересечения горизонтальной и вертикальной плоскостей. Для этого необходимо, чтобы это пересечение было изображено на чертеже с наибольшей ясностью.

Так, на фиг. 2, проекция $a''b''$ прямой AB не находится в плоскости, которая была бы действительно вертикальна; надо понимать, что эта плоскость повернута вокруг прямой LM до положения $LMP'Q'$ и вертикальная проекция $a'b'$ построена в этом положении плоскости.

Помимо простоты выполнения, этот способ изображения обладает еще тем достоинством, что сокращает работу проектирования. Действительно, предположим, что точки a и a' представляют собой горизонтальную и вертикальную проекции точки A ; тогда плоскость, проходящая через прямые Aa и Aa' , будет одновременно перпендикулярна обоим плоскостям проекций, так как она проходит через прямые, перпендикулярные к ним; она будет поэтому также перпендикулярна к их взаимному пересечению LM , а прямые aC и $a'C$, по которым она пересекает эти две плоскости, будут, следовательно, сами перпендикулярны к LM .

Но при вращении вертикальной плоскости вокруг LM , как на шарнире, прямая $a'C$ не перестает быть перпендикулярной к LM и остается ей перпендикулярной также и в положении Ca'' , занимаемом ею после совмещения плоскостей. Так как прямые aC и Ca'' проходят обе через точку C и обе перпендикулярны к LM — они являются продолжением одна другой; то же самое имеет место и для прямых bD , Db'' , относящихся к точке B .

Отсюда следует, что вертикальная проекция точки, в предположении, что плоскости совмещены, будет лежать на прямой, проведенной через горизонтальную проекцию перпендикулярно к пересечению LM плоскостей проекции. Соответственно, горизонтальная проекция будет лежать на прямой, проведенной через вертикальную проекцию перпендикулярно LM .

Этот результат часто применяется на практике.

9. До сих пор мы рассматривали прямую AB (фиг. 1) как неопределенную по длине, и нас интересовало только ее направление; но прямая может быть рассмотрена и как ограниченная двумя своими точками A и B , и в этом случае может оказаться необходимым знать также ее величину. Мы увидим, как можно определить эту длину, зная проекции прямой.

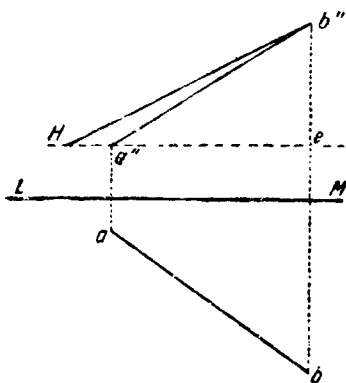
Когда прямая параллельна одной из двух плоскостей проекций, ее длина равна длине ее проекции на эту плоскость, так как прямая и ее проекция, будучи обе ограничены двумя перпендикулярами к плоскости проекции, параллельны между собой и заключены между параллельными прямыми. В этом частном случае по заданной проекции определяется длина прямой, которая равна проекции.

Можно убедиться в том, что прямая параллельна одной из плоскостей проекций, если ее проекция на другую плоскость параллельна линии пересечения обеих плоскостей.⁸

Если прямая наклонна к обоим плоскостям проекций, ее длина больше, нежели длина каждой из проекций, и может быть получена из них при помощи очень простого построения.

Пусть AB (фиг. 2) — прямая линия, проекции которой ab и $a'b'$ даны, и длину которой требуется определить; если через точку A в вертикальной плоскости, проходящей через прямую, провести горизонталь AE и продолжить ее до пересечения в E с вертикальной прямой, проведенной через другой конец, то мы получим прямоугольный треугольник AEB , из которого

мы можем определить длину прямой AB , являющуюся его гипотенузой. В этом треугольнике, помимо прямого угла, известна сторона AE , равная заданной проекции ab . Наконец, если в вертикальной плоскости провести через точку a' горизонталь $a'e$, которая будет проекцией линии AE , она пересечет вертикальную линию $b'D$ в точке e , которая будет проекцией точки E . Таким образом, $b'e$ будет вертикальной проекцией BE и будет, следовательно, одинаковой длины с ней. Итак, зная



Фиг. 3.

обе стороны, составляющие прямой угол, мы легко можем построить треугольник, гипотенуза которого дает нам длину AB .

Фиг. 2 выполнена в перспективе и не имеет ничего общего с построениями по методу проекций; дадим построение этой первой задачи во всей ее простоте.

Пусть прямая LM (фиг. 3) представляет собой линию пересечения двух плоскостей проекций⁸ и пусть прямые ab и $a'b''$ суть заданные проекции некоторой прямой; для определения длины этой прямой проведем через точку a' горизонталь неопределенной длины He , которая пересечет прямую bb'' в некоторой точке e , и отложим на ней отрезок eH , равный ab . Длина гипотенузы Hb'' будет искомой длиной прямой.⁹

Поскольку плоскости проекций перпендикулярны, мы могли бы все операции, произведенные в одной из них, произвести в другой и пришли бы к тому же результату.¹⁰

Из сказанного выше следует, что если мы имеем две проекции тела, ограниченного плоскими гранями, прямолинейными ребрами и вершинами многогранных углов, сводящиеся к системам проекций прямолинейных ребер, то нетрудно будет определить длину любого ребра тела. Это ребро будет

либо параллельным одной из двух плоскостей проекций, либо же наклонным к обеим: в первом случае искомая длина ребра будет равна длине его проекции, во втором — эту длину можно будет определить по двум ее проекциям описанным выше способом.

Сравнение начертательной геометрии с алгеброй¹¹

10. Было бы уместно здесь указать способ построения проекций тел, ограниченных плоскостями и прямолинейными ребрами; однако такого общего способа не существует: действительно, большая или меньшая простота построения проекции тела зависит от того, каким образом задано положение вершин его углов, и самый характер построения зависит от способа задания. С этим вопросом дело обстоит точно так же, как с алгеброй, где нет никакого общего способа для составления уравнений. В каждом частном случае ход рассуждений зависит от характера соотношений между известными и неизвестными величинами; только путем разнообразных примеров можно приучить начинающих понимать эти соотношения и выражать их уравнениями. То же самое имеет место и в начертательной геометрии. Привычка к построениям и умение выбирать наиболее простые и изящные способы в каждом частном случае приобретает только благодаря многочисленным упражнениям с циркулем и линейкой за чертежным столом. В анализе, когда уравнения составлены, существуют способы для их решения и определения значений всех неизвестных; так и в начертательной геометрии, когда проекции выполнены, существуют общие методы для построения всего того, что вытекает из формы и взаимного расположения тел.

Наше сравнение начертательной геометрии с алгеброй не бесцельно: обе науки имеют самую тесную связь. Нет ни одного построения в начертательной геометрии, которое нельзя было бы перевести на язык анализа; и если вопрос касается не более чем трех неизвестных, каждая аналитическая опера-

ция может быть трактована как запись геометрической картины.

Следует пожелать, чтобы обе эти науки изучались вместе: начертательная геометрия внесла бы присущую ей наглядность в наиболее сложные аналитические операции, а анализ в свою очередь внес бы в геометрию свойственную ему общность.

Основное положение представления формы и положения поверхностей. Применение к плоскости

11. Принцип, положенный в основание метода проекций, представляет удобство для выражения положения в пространстве точек, бесконечных или ограниченных прямых и, следовательно, для представления формы и положения тела, ограниченного плоскими гранями, прямолинейными ребрами и вершинами многогранных углов, так как в этом случае тело совершенно определено, потому что известно положение всех его ребер и вершин всех его углов. Но если тело ограничено: или одной кривой поверхностью, все точки которой подчинены одному условию, как, например, в случае поверхности шара, или прерывной совокупностью многих частей различных поверхностей, как это имеет место в случае тела, выточенного на токарном станке, — этот принцип становится не только неудобным для применения и не дающим правильного представления, но и неплодотворным и недостаточным.

Прежде всего легко убедиться в том, что выбранный нами принцип был бы неудобным и даже вообще непригодным, если бы руководствоваться им одним; для изображения положения всех точек кривой поверхности надо не только знать горизонтальную и вертикальную проекции каждой ее точки, но эти две проекции одной и той же точки должны быть еще связаны между собой так, чтобы нельзя было ошибочно сопоставить горизонтальную проекцию одной какой-либо точки с вертикальной проекцией другой; так как самый простой способ связать между собой две проекции — это соединить их прямой

линией, перпендикулярной линии пересечения плоскостей проекций, то чертеж был бы загроможден огромным количеством линий, которые вносили бы тем большую путаницу, чем большей точности мы старались бы достичь. Мы покажем далее, что этот метод был бы недостаточным и неплототворным.

Среди бесконечного числа различных кривых поверхностей существуют такие, которые простираются лишь в конечной и ограниченной части пространства и проекции которых имеют конечные размеры по всем направлениям; поверхность шара, например, относится к этому случаю. Площадь его проекции на плоскость была бы равна площади круга того же радиуса, что и шар, и можно себе представить, что плоскость, на которую проектируется поверхность, — достаточно большого размера, чтобы эта проекция поместилась. Все цилиндрические поверхности не ограничены в том направлении, которое определяется прямой, служащей образующей. Самая плоскость, являющаяся наиболее простой из всех поверхностей, не ограничена в двух направлениях. Наконец, существует большое количество поверхностей, различные полы которых простираются одновременно во всех областях пространства. Однако плоскости, на которых строятся проекции, обладают, по необходимости, ограниченной протяженностью. Поэтому, если бы не было другого средства, чтобы познать природу кривой поверхности, кроме двух проекций каждой из ее точек, то этот способ был бы применим только к тем точкам поверхности, которые соответствуют протяженности плоскости проекций; все те точки, которые не укладывались бы в эти пределы, не могли бы быть ни заданы, ни определены; таким образом, метод был бы недостаточным. Наконец, он был бы и недостаточно плодотворным, потому что мы не могли бы сделать никаких выводов о плоскостях, касательных к поверхности, о нормалях, о двух кривизнах в каждой точке поверхности, о линиях перегиба, о ребрах возврата, о кратных линиях, кратных точках, словом, о всех свойствах, которые необходимо рассматривать в отношении кривой поверхности.

Приходится поэтому прибегать к другому принципу, который был бы совместим с первым и дополнял бы его везде, где он оказывается недостаточным. Перейдем к изложению этих новых положений.

12. Нет ни одной кривой поверхности, которую нельзя было бы рассматривать как образованную движением кривой линии: или сохраняющей свою форму при изменении положения, или же изменяющей одновременно и форму, и положение в пространстве. Поскольку это положение может быть трудно понятным в силу своей общности, мы поясним его на нескольких уже знакомых нам примерах.

Цилиндрические поверхности могут быть образованы в основном двумя способами: или движением прямой линии, остающейся во все время движения параллельной некоторой заданной прямой, причем конец ее скользит по заданной кривой; или же движением кривой, служившей направляющей в первом случае, которая движется таким образом, что одна точка скользит по заданной прямой, а все другие точки описывают линии, параллельные этой прямой. В обоих этих способах образования образующая линия — прямая в первом случае и любая кривая во втором — сохраняет постоянную форму: она только изменяет свое положение в пространстве.

Конические поверхности также могут быть образованы в основном двумя способами.

Прежде всего их можно рассматривать как образованные движением неопределенной прямой, при всех положениях проходящей через данную точку, причем эта прямая при движении неизменно скользит по заданной кривой, направляющей ее движение. Точка, через которую всегда проходит прямая, есть центр поверхности; ее неправильно называют вершиной. При этом способе образования поверхности образующая линия также сохраняет постоянную форму — она никогда не перестает быть прямой.

Конические поверхности могут быть образованы также и другим способом, который ради простоты мы применим здесь только к случаю круговых оснований. Эти поверхности могут быть образованы движением окружности круга, происходящим таким образом, что плоскость круга всегда остается параллельной самой себе и его центр всегда находится на прямой, проходящей через вершину, но радиус в каждый данный момент движения пропорционален расстоянию между центром круга и вершиной. Таким образом, когда при своем движении плоскость круга стремится приблизиться к вершине поверхности, радиус его уменьшается и обращается в нуль, если плоскость проходит через вершину, чтобы затем снова возрасти до бесконечности, когда плоскость, пройдя через вершину, постепенно удаляется от нее.

В этом втором способе образования окружность круга, являющаяся образующей кривой, не только изменяет свое положение, но в каждый момент движения изменяет и свою форму, так как она изменяет радиус, а следовательно, кривизну и размеры.

Приведем, наконец, третий пример.

Поверхность вращения может быть образована движением плоской кривой, вращающейся вокруг прямой, как угодно расположенной в ее плоскости. В этом случае образующая кривая сохраняет постоянную форму, меняется только ее положение. Но поверхность вращения можно также рассматривать как образованную движением окружности круга, который движется таким образом, что его центр всегда лежит на оси, его плоскость перпендикулярна к ней, и радиус в каждый данный момент равен расстоянию от точки пересечения плоскости круга с осью до точки его пересечения с кривой, любым образом заданной в пространстве. В этом случае образующая кривая изменяет одновременно и форму и положение.

Этих трех примеров должно быть достаточно, чтобы показать, что все кривые поверхности могут быть образованы

движением некоторых кривых линий, и что среди них нет ни одной, форма и положение которой не могли бы быть вполне определены точным и полным заданием ее образования. Это новое соображение и составляет дополнение метода проекций. Мы будем в дальнейшем неоднократно убеждаться в его простоте и плодотворности.

Таким образом, форма и положение кривой поверхности определяются не заданием ее отдельных точек, но построением в некоторой точке образующей кривой, согласно форме и положению, которые она должна иметь при прохождении через эту точку. При этом нужно заметить: 1) поскольку каждая кривая поверхность может быть образована бесконечным числом способов — от умения и проницательности чертежника зависит выбрать из всех возможных способов образования тот, при котором образующая кривая будет наиболее простой и который требует наименее утомительных рассуждений; 2) долговременная практика показывает, что, вместо того чтобы рассматривать для каждой кривой поверхности лишь один из способов ее образования, что требовало бы изучения закона движения и изменения формы образующей, — во многих случаях значительно проще рассматривать одновременно две разные образующие и задать для каждой точки построение двух образующих кривых.

Таким образом, начертательная геометрия учит, что для определения формы и положения кривой поверхности достаточно дать способ построения горизонтальной и вертикальной проекций двух различных образующих, проходящих через любую точку этой поверхности, причем одна из проекций этой точки может быть выбрана произвольно.

13. Применим все эти общие рассуждения к плоскости, которая является самой простой из всех поверхностей и имеет наиболее частое применение.

Плоскость образована таким движением прямой линии, начальное положение которой задано, что все ее точки опи-

сываю прямые, параллельные второй заданной прямой. Если вторая прямая сама находится в рассматриваемой плоскости, можно также сказать, что эта плоскость образована второй прямой, которая движется так, что все ее точки описывают прямые, параллельные первой.

Итак, положение плоскости определяется двумя прямыми линиями, любая из которых может считаться ее образующей. Положение этих двух прямых в образуемой ими плоскости абсолютно безразлично: поэтому для метода проекции важно выбирать такие прямые, которые требуют наиболее простых построений. Поэтому в начертательной геометрии положение плоскости определяется заданием двух прямых, по которым она пересекает плоскости проекций. Легко понять, что эти две прямые должны встречать в одной и той же точке пересечение плоскостей проекций и что, следовательно, это и есть их точка пересечения.

Так как нам часто придется иметь дело с плоскостями, мы будем для краткости называть *следами* прямые, по которым каждая из этих плоскостей пересекает плоскости проекций и которые будут служить для определения ее положения.

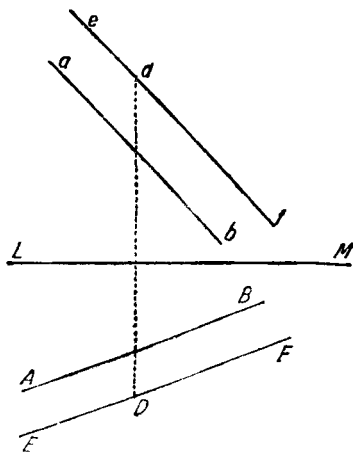
Решение некоторых элементарных задач на прямую линию и плоскость

14. Установив эти предварительные положения, перейдем к решению некоторых задач, которые будут преследовать двоякую цель: упражняться в методе проекций и изучать способы для дальнейшего освоения начертательной геометрии.

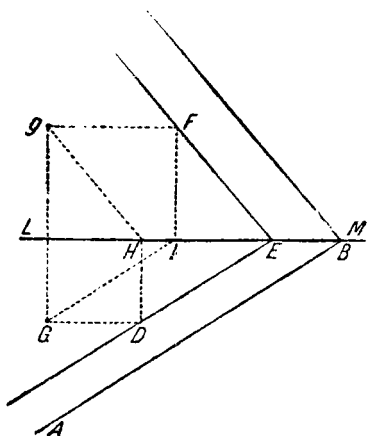
Задача первая. Дана точка (фиг. 4) своими проекциями D и d и прямая проекциями AB и ab ; построить проекции другой прямой, проходящей через данную точку параллельно первой.

Решение. Горизонтальные проекции заданной прямой и искомой должны быть параллельны между собой, так как

они представляют собой пересечение двух параллельных друг другу вертикальных плоскостей одной и той же плоскостью. То же самое справедливо и для вертикальных проекций тех же прямых. Кроме того, так как искомая прямая должна проходить через заданную точку, ее проекции должны проходить соответственно через проекции той же точки. Следовательно,



Фиг. 4.



Фиг. 5.

если через точку D провести EF параллельно AB и если через точку d провести ef параллельно ab , то прямые EF и ef будут искомыми проекциями.

15. Задача вторая. Дана плоскость (фиг. 5), следы которой суть AB и BC , и точка, проекций которой суть G и g . построить следы второй плоскости, проведенной через данную точку параллельно первой.

Решение. Следы искомой плоскости должны быть параллельны одноименным следам заданной плоскости, так как эти следы, рассматриваемые попарно, являются пересечениями двух параллельных плоскостей одной и той же плоскостью;

Остается только найти для каждого из них только одну из точек, через которую он должен проходить. Для этого проведем через данную точку горизонтальную прямую, лежащую в искомой плоскости; эта прямая будет параллельна следу AB и пересечет вертикальную плоскость в точке, которая будет одной из точек вертикального следа искомой плоскости; ее проекции получатся, если провести через точку g неопределенную горизонталь gF , а через точку G прямую GI , параллельную ab .¹² Если продолжить GI до ее встречи в точке I с пересечением двух плоскостей проекций LM , то эта точка будет горизонтальной проекцией пересечения горизонтальной прямой с вертикальной плоскостью. Следовательно, эта точка пересечения будет находиться на вертикали IF , проведенной через точку I . Но она должна также лежать на gF ; следовательно, она совпадает с точкой F пересечения двух последних прямых. Наконец, если через точку F провести прямую, параллельную BC , то она и будет следом искомой плоскости на вертикальной плоскости, и если, продолжив этот след до пересечения с LM в точке E , проведем ED параллельно AB , то получим след той же плоскости в горизонтальной плоскости.

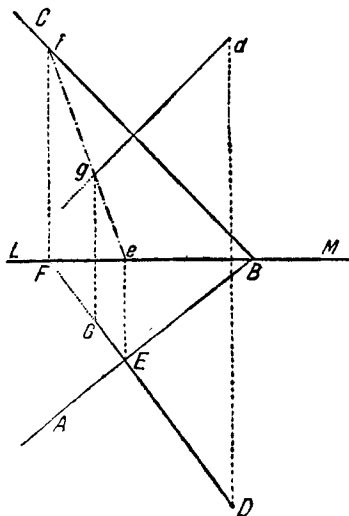
Вместо того чтобы рассматривать горизонтальную прямую в искомой плоскости, можно было бы рассматривать прямую, параллельную вертикальной плоскости, что после совершенно аналогичного рассуждения привело бы к следующему построению.

Проведем через точку G неопределенную прямую⁶ GD параллельно LM ; через точку g проведем gH , параллельно CB , и продолжим ее до пересечения с LM в точке H , через которую проведем HD , перпендикулярно LM ; эта последняя пересечет GD в точке D ; проведенная через нее прямая, параллельная AB , будет одним из следов искомой плоскости; и если, продолжив этот след до пересечения с LM в точке E , проведем EF параллельно BC , то получим ее след на вертикальной плоскости.

16. Задача третья. Дана плоскость (фиг. 6), следы которой суть AB и BC , и точка с проекциями D и d . Построить: 1) проекции прямой, проведенной из этой точки перпендикулярно плоскости; 2) проекцию точки пересечения прямой и плоскости.

Решение. Перпендикуляры DG , dg , опущенные из точек D и d на соответственные следы плоскости, будут

неопределенными проекциями искомой прямой, так как, если построить вертикальную плоскость, проходящую через перпендикуляр, эта плоскость пересечет горизонтальную и заданную плоскости по двум прямым, которые будут обе перпендикулярны взаимному пересечению этих плоскостей AB ; но так как первая из этих прямых представляет собой проекцию вертикальной плоскости, она будет также проекцией перпендикуляра, заключенного в этой плоскости; следовательно, проекция этого перпендикуляра должна пройти через точку D и быть перпендикулярной к AB .



Фиг. 6.

То же самое доказательство справедливо и для вертикальной проекции.

Что касается точки пересечения перпендикуляра с плоскостью, очевидно, что она должна находиться на пересечении этой плоскости с вертикальной плоскостью, проходящей через перпендикуляр; это пересечение проектируется в виде линии EF . Если бы мы имели вертикальную проекцию fg этого пересечения, она содержала бы искомую точку; а так как эта

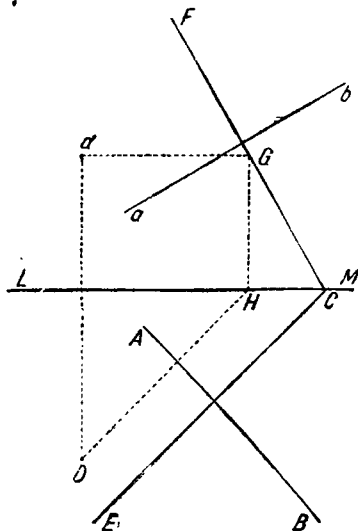
точка должна также проектироваться и на прямую dg , она окажется в пересечении g двух прямых fe и dg . Остается только найти прямую fe ; пересечение данной плоскости с перпендикулярной ей вертикальной встречает горизонтальную плоскость в точке E , вертикальную проекцию которой e мы получим, проводя Ee перпендикулярно к LM ; она встречает вертикальную плоскость проекции в точке, горизонтальная проекция которой есть пересечение F прямой LM с DG , продолженной, если это нужно, а ее вертикальная проекция должна лежать и на вертикали Ff и на следе CB ; следовательно, это будет точка f их пересечения.

После того как найдена вертикальная проекция g основания перпендикуляра, легко построить и горизонтальную проекцию; если мы опустим на LM неопределенный перпендикуляр gG , искомая точка будет лежать на этой прямой; но она должна лежать и на прямой DF , и, следовательно, будет точкой G пересечения этих двух прямых.

17. Задача четвертая (фиг. 7). Даны прямая своими проекциями AB и ab и точка — проекциями D и d . Построить следы плоскости, проходящей через эту точку перпендикулярно прямой.

Решение. Из предыдущей задачи вытекает, что оба следа должны быть перпендикулярны соответственным проекциям обеих прямых; остается найти для каждого из них одну из точек, через которые он должен пройти. Для этого проведем в искомой плоскости через заданную точку горизонталь, продолженную до пересечения с вертикальной плоскостью проекции; ее вертикальную проекцию мы получим, проведя через точку d неопределенную горизонталь dG , а ее горизонтальную проекцию, проведя через точку D перпендикуляр DH к AB и продолжив его до пересечения с LM в точке H ; эта точка и будет горизонтальной проекцией точки пересечения горизонтали с вертикальной плоскостью проекции. Точка пересечения должна находиться на вертикали HG и на гори-

зонтали dG , т. е. в точке G пересечения обеих прямых, которая и будет одной из точек искомого следа на вертикальной плоскости; этот след мы найдем, проведя через точку G прямую FC перпендикулярно ab ; наконец, если через точку C , в которой первый след пересекается с LM , провести CE перпендикулярно AB , то мы найдем второй искомый след.



Фиг. 7.

Если бы речь шла о нахождении точки пересечения плоскости с прямой, надо было бы рассуждать совершенно так же, как в предыдущем случае.

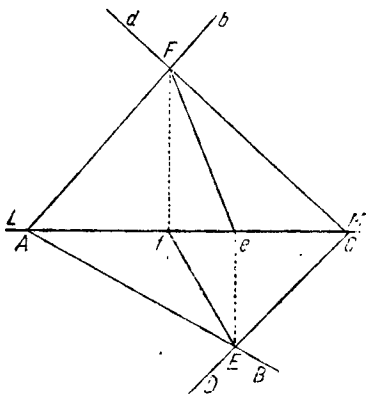
Наконец, если бы надо было опустить перпендикуляр из данной точки на прямую, мы построили бы, как изложено выше, пересечение прямой с плоскостью, проведенной перпендикулярно ей через данную точку, и нашли бы для каждой проекции искомого перпендикуляра две точки, через которые она должна проходить.

18. Задача пятая. Положение двух плоскостей (фиг. 8) задано их следами AB и Ab для одной и CD и Cd для другой плоскости; построить проекции прямой, по которой они пересекаются.

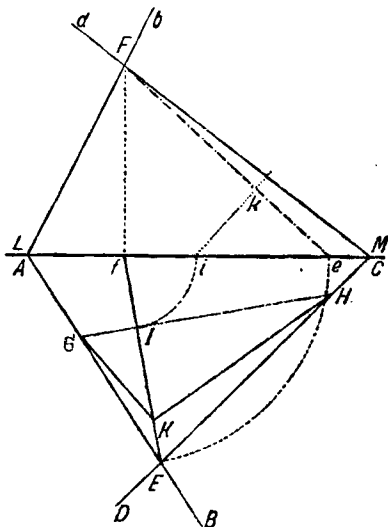
Решение. Так как все точки следа AB находятся в первой из заданных плоскостей и все точки следа CD во второй, то точка пересечения обоих следов, очевидно, лежит в обеих плоскостях; следовательно, она принадлежит искомой прямой. Подобным же образом убеждаемся в том, что точка пересечения обоих следов в вертикальной плоскости F также лежит на этой прямой. Таким образом, линия пересечения обеих

плоскостей расположена так, что она пересекает горизонтальную плоскость в точке E и вертикальную в F .

Поэтому, если мы спроектируем точку F на горизонтальную плоскость, опуская перпендикуляр Ff на LM , и проведем прямую fE , то она и будет горизонтальной проекцией пересечения обеих плоскостей. Подобным же образом спроектируем



Фиг. 8.



Фиг. 9.

точку E на вертикальную плоскость, опуская перпендикуляр Ee на LM ; если провести теперь прямую eF , то она и будет вертикальной проекцией той же линии пересечения.

19. Задача шестая. Две плоскости (фиг. 9) заданы: первая следами AB , Ab и вторая следами CD , Cd ; построить угол, который они образуют между собою.

Решение. Построив, как и в предыдущей задаче, горизонтальную проекцию Ef пересечения двух плоскостей и проведя третью плоскость, перпендикулярную к ним и, следовательно, перпендикулярную к их линии пересечения, мы увидим, что

эта третья плоскость пересекает две заданные по двум прямым, составляющим между собой угол, равный искомому углу.

Горизонтальный след этой третьей плоскости будет перпендикулярен к проекции Ef пересечения двух заданных плоскостей и образует вместе с двумя другими прямыми треугольник, в котором угол, лежащий против горизонтальной стороны, и будет искомым углом. Нужно только построить этот треугольник.

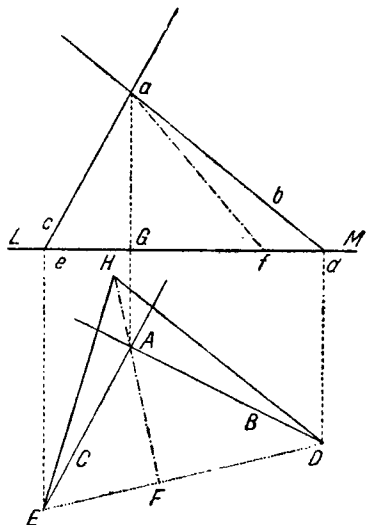
Безразлично через какую точку пересечения двух первых плоскостей проходит третья; следовательно, можно произвольно выбрать ее след на горизонтальной плоскости, лишь бы он был перпендикулярен Ef . Проведем произвольную прямую GH перпендикулярно Ef , пересекающую в точках G и H следы двух заданных плоскостей и в точке I прямую Ef , и примем ее за основание треугольника, который мы должны построить. Действительно, заметим, что для совмещения с горизонтальной плоскостью надо вращать плоскость этого треугольника вокруг своего основания GH , как на шарнире; в этом движении его вершина, сначала расположенная на пересечении обеих плоскостей, все время остается в вертикальной плоскости, проведенной через это пересечение, потому что эта вертикальная плоскость перпендикулярна GH ; после того как плоскость треугольника совместилась с горизонтальной плоскостью, его вершина будет лежать на одной из точек прямой Ef . Следовательно, остается только найти высоту треугольника или величину перпендикуляра, опущенного из точки I на пересечение обеих плоскостей.

Этот перпендикуляр находится в вертикальной плоскости, проходящей через Ef . Поэтому, если вращать эту плоскость вокруг вертикали Ff для совмещения с вертикальной плоскостью проекций и если отложить отрезки: fe , равный fE , и fi , равный fI , то прямая eF определит величину отрезка линии пересечения, заключенного между двумя плоскостями проекций; если теперь из точки i опустить на эту прямую перпендикуляр ik , то он и будет высотой искомого треугольника. Наконец,

откладывая IK равным ik и заканчивая построение треугольника GKH , мы найдем угол при вершине K , который будет равен углу между обеими плоскостями.¹³

20. Задача седьмая. Две прямые, пересекающиеся в пространстве (фиг. 10), заданы своими горизонтальными проекциями AB , AC и вертикальными ab , ac . Построить угол, составляемый этими прямыми.

Прежде чем перейти к решению, заметим, что если данные прямые пересекаются, то точка A пересечения их горизонтальных проекций и точка a пересечения их вертикальных проекций будут проекциями точки пересечения прямых и, следовательно, будут лежать на одной и той же прямой aGA , перпендикулярной LM . Если обе точки A и a не находились бы на одном перпендикуляре к LM , то заданные прямые не пересекались бы, и, следовательно, не лежали бы в одной плоскости.



Фиг. 10.

Решение. Рассмотрим две заданные прямые, продолженные до встречи с горизонтальной плоскостью, каждая в своей точке, и построим эти две точки пересечения. Для этого продолжим прямые ab и ac до пересечения с LM в точках d и e , которые будут вертикальными проекциями этих двух точек пересечения; через точки d и e проведем в горизонтальной плоскости перпендикулярно LM две неопределенные прямые dD и eE , которые определяют их положение своими точками пересечения D и E с соответственными горизонтальными

проекциями AB и AC , продолженными, если это потребуется.

После этого проведем прямую DE , которая вместе с отрезками заданных прямых, заключенными между их точкой пересечения и точками D и E , составляют треугольник, угол которого, противоположный DE , и будет искомым углом; следовательно, все сводится к построению этого треугольника. Опустим из точки A на DE неопределенный перпендикуляр AF и рассмотрим вращение треугольника вокруг его основания DE , как на шарнире, до совмещения с горизонтальной плоскостью; вершина этого треугольника во время его движения будет оставаться в вертикальной плоскости, проходящей через AF , и ляжет на продолжении FA в некоторой точке H , расстояние которой от основания DE должно быть определено.

Но горизонтальная проекция этого расстояния есть прямая AF и высота одного из ее концов над другим равна aG , поэтому аналогично фиг. 3, отложим на LM отрезок Gf , равный AF , и построим гипотенузу af ; эта гипотенуза и будет искомым расстоянием. Наконец, если отложить FH равным af и через точку H провести две прямые HD и HE , то треугольник будет построен, и угол DHE будет искомым углом.

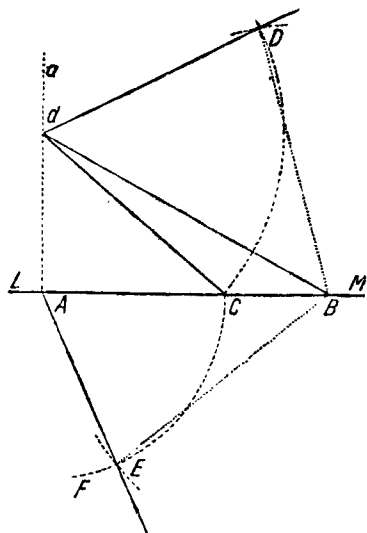
21. Задача восьмая. Даны проекции прямой и следы плоскости. Построить угол, составленный прямой и плоскостью.

Решение. Если опустить перпендикуляр из некоторой точки прямой на заданную плоскость, то угол, составляемый этим перпендикуляром с заданной прямой, будет дополнением искомого угла; для решения вопроса достаточно построить этот угол.

Если на двух проекциях прямой выбрать две точки, которые лежали бы на одном и том же перпендикуляре к пересечению двух плоскостей проекций, и если через эти точки провести перпендикуляры к соответственным следам данной плоскости, то мы получим горизонтальную и вертикальную проекции второй прямой. Вопрос сведется, таким образом,

к построению угла, составленного двумя пересекающимися прямыми, т. е. к предыдущему случаю.

22. При построении карты местности обычно выбирают выдающиеся точки и связывают их между собой прямыми линиями, составляющими треугольники; эти треугольники должны быть затем нанесены на карту в более мелком масштабе и в том же порядке, как исходные. Операции, производимые на данной местности, состоят главным образом в измерении углов и этих треугольников; для того чтобы последние могли быть непосредственно нанесены на карту, они должны все лежать в горизонтальной плоскости, параллельной плоскости карты. Если плоскость угла наклонна к горизонту, то на карту переносится не самый угол, а его горизонтальная проекция; эту проекцию всегда можно найти, если, помимо измерения самого угла, измерить также углы, составленные с горизонтом его сторонами, и произвести так называемую *редукцию* (приведение) угла к горизонту.



Фиг. 11.

Задача девятая. Даны: угол, составленный двумя прямыми и два угла, образованные этими прямыми с горизонтальной плоскостью проекций. Построить горизонтальную проекцию первого из этих углов.

Решение. Пусть A (фиг. 11) горизонтальная проекция вершины искомого угла и AB — горизонтальная проекция одной из его сторон; таким образом, остается построить другую сторону AE . Примем во внимание, что вертикальная

плоскость проекций проходит через AB и, проведя через точку A неопределенную вертикаль Aa , возьмем на ней произвольную точку d , которую будем считать вертикальной проекцией вершины рассматриваемого угла. Если через точку d провести прямую dB , составляющую с горизонталью угол dBA , равный углу, составляемому первой стороной с горизонтом, то точка B будет точкой встречи этой стороны с горизонтальной плоскостью. Подобным же образом, если через точку d провести прямую dC , составляющую с горизонталью угол dCA , равный тому, который вторая сторона составляет с горизонтом, и если теперь из точки A , как из центра, описать радиусом, равным AC , дугу неопределенного круга CEF ,¹⁴ то вторая сторона угла может встретить горизонтальную плоскость только в одной из точек дуги CEF . Остается только определить расстояние этой точки до некоторой другой точки B .

Это последнее расстояние лежит в плоскости рассматриваемого угла. Если, следовательно, провести прямую dd таким образом, чтобы угол DdB был бы равен измеренному углу, и отложить отрезок dd , равный dC , то прямая DB будет равна этому расстоянию.

Поэтому, если из точки B , как из центра, провести дугу круга, радиусом, равным BD , то точка E , где эта дуга пересечется с первой дугой CEF , будет точкой встречи второй стороны с горизонтальной плоскостью; следовательно, прямая AE будет горизонтальной проекцией этой стороны, и угол BAE — горизонтальной проекцией измеренного угла.

Девяти рассмотренных вопросов едва ли достаточно, чтобы дать представление о методе проекций; они не могут показать всех его возможностей. Однако, по мере того как мы поднимаемся до более общих соображений, мы осуществим операции, наиболее отвечающие нашей цели.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

О касательных плоскостях и нормалях к кривым поверхностям

23. В виду того, что всякая кривая поверхность может быть образована многими способами посредством движения кривых линий, то, рассматривая в любой точке поверхности две различные образующие в том положении, которое они должны занимать, проходя через эту точку, мы можем провести в этой точке касательные к каждой из образующих; плоскость, проведенная через обе касательные, есть *касательная плоскость*. Та точка поверхности, где пересекаются обе образующие и которая в то же время является общей для обеих касательных и касательной плоскости, есть точка касания поверхности и плоскости.

Прямая, проведенная через точку касания перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности. Она перпендикулярна к элементу поверхности, потому что расположение этого элемента повсюду совпадает с направлением касательной плоскости, которая может быть рассмотрена как его продолжение.

24. Рассмотрение касательных плоскостей и нормалей к кривым поверхностям очень полезно в различных прикладных областях, а для многих из них оно является абсолютно

необходимым. Мы приведем лишь по одному примеру для случаев, взяв их из области архитектуры и живописи.

Отдельные части, из которых состоят своды, сложенные из обтесанных камней, называются *клинчатыми камнями*; грани, которыми касаются два соседних клинчатых камня, независимо от того лежат ли они в одном ряду или в двух смежных рядах, называются *гранями соприкосновения*.¹⁵

Положение граней соприкосновения в сводах подчинено многим условиям, соблюдение которых обязательно. На протяжении нашего курса мы изложим последовательно все эти условия, но в данный момент мы займемся только тем из них, которое имеет отношение к рассматриваемому вопросу.

Одно из условий, которым должно удовлетворять положение граней соприкосновения, состоит в том, чтобы они были перпендикулярны между собой и расположены перпендикулярно к поверхности свода. При значительном уклонении от этого условия не только были бы нарушены общепринятые законы, без которых пострадала бы сторона эстетики, но и самый свод стал бы менее прочным и менее долговечным; так, если бы одна из граней соприкосновения была наклонной к поверхности свода, то один из двух смежных клинчатых камней имел бы тупой, а другой — острый угол; во взаимодействии, которое оба эти клинчатые камня оказывали бы друг на друга, эти два угла обладали бы различным сопротивлением; в силу хрупкости материала острый угол мог бы дать трещину, что изменило бы форму свода и сократило бы долговечность здания. Поэтому разделение свода на отдельные камни требует обязательного знания свойств касательных плоскостей и нормалей к кривой поверхности свода.

25. Перейдем к другому примеру, взятому из такой области искусства, которая на первый взгляд кажется не подчиненной столь строгим требованиям.

Принято считать, что живопись складывается из двух совершенно различных частей. Одна — это собственно искусство;

оно имеет целью возбуждать в зрителе определенную эмоцию, вызывать в нем определенное чувство или приводить его в такое состояние, которое способствовало бы созданию определенного впечатления; живопись предполагает в художнике большой опыт в философии;¹⁶ она требует от него самых точных знаний природы вещей, способа их воздействия на нас и признаков, хотя бы бессознательных, которыми это воздействие проявляется; она может быть результатом лишь самого утонченного воспитания, которого никто не дает и которое мы не в состоянии дать нашим молодым художникам; она не подчиняется никакому общему правилу; она выносит лишь советы.

Другая часть живописи является, собственно говоря, ремеслом: его целью является точное выполнение концепций первой части. Здесь нет ничего произвольного; все может быть предусмотрено строгим рассуждением, потому что все является необходимым результатом выбора объектов и данных обстоятельств. Когда известны форма и положение предмета, свойства, число и положение тел, которые могут его освещать, будь то прямым светом или отраженными лучами; когда фиксировано положение глаза зрителя, когда, наконец, хорошо установлены и известны все обстоятельства, могущие влиять на зрение, то оттенок изображения каждой точки на видимой поверхности этого предмета будет совершенно определенным. Все, что связано с цветом оттенка и его яркостью, зависит от положения касательной плоскости в этой точке по отношению к освещающим телам и глазу зрителя; это может быть определено только умозрительно; а когда это установлено, его надо использовать в точности. Всякое ослабление и всякое усиление изменило бы наружный вид предмета, исказило бы его формы, произвело бы не тот эффект, которого ожидает художник.

Я хорошо знаю, что часто требуемая быстрота выполнения работы ограничивает для художника возможность использования метода и заставляет его работать без всяких вспомо-

гательных средств и быть предоставленным исключительно своим способностям; для него значительно легче расположить предметы, наблюдать их оттенки и подражать им; но если бы он привык рассматривать положение касательных плоскостей и обе кривизны поверхностей в каждой их точке — кривизны, которые будут служить предметом последующих лекций, — он извлек бы еще большую пользу из этого материального средства, он был бы в состоянии восстановить эффекты, которым помешало проявиться отсутствие некоторых условий и, наоборот, устранить такие, которые вызваны чуждыми причинами.

Наконец, неопределенные выражения как „*неровность*“, „*светотень*“, постоянно употребляемые художниками, свидетельствуют о том, что они нуждаются в более точных знаниях и в более строгих рассуждениях.

26. Помимо пользы для искусства, рассмотрение касательных плоскостей и нормалей к кривым поверхностям является одним из самых плодотворных методов, которые применяются в начертательной геометрии для решения вопросов, трудно поддающихся другим способам; приведем несколько таких примеров.

Способ построения касательных плоскостей в данных точках кривых поверхностей

27. Общий метод определения касательной поверхности к кривой поверхности состоит (23) в построении в точке касания касательных к двум различным кривым образующим, проходящим через эту точку и в построении плоскости, заключающей эти прямые. В некоторых частных случаях для облегчения построения мы будем отчасти отступать от этого метода, но всегда достигать тех же результатов.

Что касается построения нормали, то мы не будем особо заниматься этим вопросом, так как он сводится к построению перпендикуляра к касательной плоскости, что мы умеем делать.

Проведем через рассматриваемую точку на поверхности, горизонтальная проекция которой C , прямолинейную образующую в том положении, которое она должна иметь, проходя через эту точку: так как эта образующая — прямая линия, то она будет ее собственной касательной; следовательно, она будет одной из двух прямых, определяющих положение касательной плоскости; кроме того, она будет параллельна заданной прямой; следовательно, ее две проекции будут соответственно параллельны AB и ab ; и неопределенная параллельная EF , проведенная через точку C параллельно AB , будет горизонтальной проекцией образующей.

Чтобы получить ее вертикальную проекцию, продолжим образующую на цилиндрической поверхности до пересечения с горизонтальной плоскостью; она сможет пересечь ее только в некоторой точке, которая будет находиться одновременно на проекции EF и на кривой EPD и которая будет, следовательно, пересечением этих двух линий; таким образом, чтобы найти эту точку, надо продолжить EF до ее пересечения с кривой EPD .

Здесь возможны два случая: или прямая EF пересечет след цилиндра только в одной точке, или она пересечет его в нескольких точках. Мы рассмотрим оба случая в отдельности и предположим сначала, что сколько бы мы ни продолжали прямую EF , она пересечет кривую EPD только в одной точке D .

Поскольку точка D является следом образующей, то, проектируя ее на вертикальную плоскость при помощи перпендикуляра Dd и проводя через d прямую df , параллельную ab , мы получим вертикальную проекцию образующей. Таким образом, мы имеем обе проекции одной из прямых, через которые должна пройти искомая касательная плоскость. Кроме того, вертикальная проекция точки касания должна находиться на прямой Cc' , проведенной из данной точки C перпендикулярно LM ; она должна также находиться на df , следовательно, она будет точкой пересечения с этих двух линий.

Если прямая EF пересекает след EPD цилиндрической поверхности в нескольких точках D, E , мы будем поступать для каждой из этих точек подобным же образом, как описано для точки D , когда мы считали ее единственной; в результате мы будем иметь вертикальные проекции df, ef' стольких прямолинейных образующих и вертикальные проекции c, c' стольких точек касания, сколько будет точек пересечения между прямой EF и следом EPD .

В случае фиг. 12 след цилиндрической поверхности является окружностью круга, обладающей свойством иметь с прямой две точки пересечения; таким образом, вертикаль, проведенная через точку C , должна два раза встречать поверхность сначала в первой точке, вертикальная проекция которой есть c и через которую проходит образующая, когда она опирается на точку D , и затем во второй точке, вертикальная проекция которой есть c' и через которую проходит образующая, когда она опирается на точку E следа. Хотя эти точки и имеют общую горизонтальную проекцию, они, тем не менее, совершенно различны, и каждой из них соответствует своя плоскость касания. Действительно, для каждой из двух точек касания надо найти вторую прямую, которая должна определить положение касательной плоскости. Если строго следовать общему методу, трактуя след как вторую образующую, нужно рассматривать ее последовательное прохождение через все точки касания и провести касательную к каждой из них; но в частном случае цилиндрических поверхностей можно упростить задачу. Действительно, касательная плоскость в точке C , с касается поверхности на всем протяжении прямолинейной образующей, проходящей через эту точку; следовательно, она касается ее в точке D , находящейся на образующей, и, следовательно, должна проходить через касательную к следу в точке D . Подобным же рассуждением находим, что плоскость, касательная в C c' должна проходить через касательную к следу, проведенную через E . Поэтому, если в двух точках D и E провести к следу две касательные DK ,

EG , продолженные до пересечения с прямой LM в двух точках K и G , то мы найдем в горизонтальной плоскости следы двух касательных плоскостей.

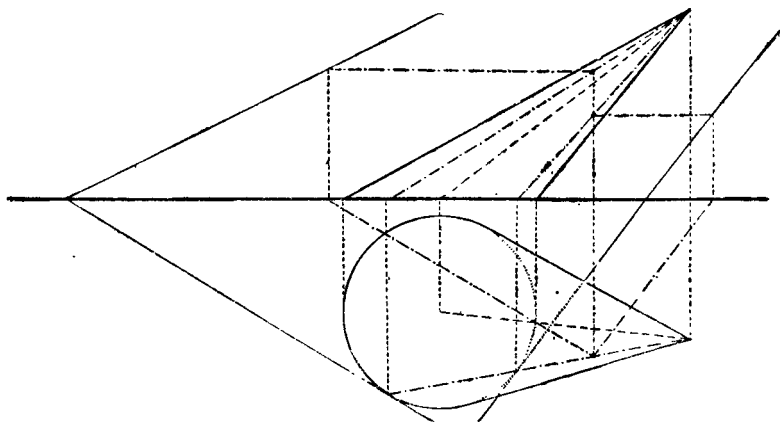
Остается, следовательно, найти следы тех же плоскостей в вертикальной плоскости; и, так как мы уже имеем для одного из этих следов точку K , а для другого — точку G , нам остается только найти по одной точке для каждой из них.

Для этого, рассматривая первую из двух касательных плоскостей, заметим, что искомая точка будет той, в которой горизонталь, проведенная в плоскости через точку касания, встретит вертикальную плоскость; найдем горизонтальную проекцию этой прямой, проведя через точку C прямую, параллельную следу DK , которую мы продолжим затем до пересечения с LM в точке I ; мы найдем вертикальную проекцию, проведя через точку c неопределенную горизонталь. Точка пересечения вертикальной плоскости с горизонталью будет находиться одновременно и на вертикали li и на горизонтали si ; она будет их точкой пересечения i ; следовательно, если через точки i и K провести прямую, мы найдем на вертикальной плоскости след первой касательной плоскости. Рассуждая таким же образом для второй касательной плоскости, мы найдем ее след в вертикальной плоскости, проводя через точку C прямую CH , параллельную горизонтальному следу EG , и продолжая эту прямую до пересечения с LM в точке H , через которую мы проведем вертикаль Hh ; через точку c' проведем горизонталь, которая пересечет вертикаль в некоторой точке h ; если через последнюю и через точку G провести прямую Gh , то мы получим искомый след.¹⁷

29. Задача вторая. Через некоторую точку, лежащую на конической поверхности, горизонтальная проекция которой известна, провести плоскость, касательную к этой поверхности.

Решение этой задачи отличается от предыдущей только в том отношении, что прямолинейная образующая, вместо

того чтобы оставаться всегда себе параллельной, все время проходит через вершину, обе проекции которой заданы. Мы полагаем целесообразным не излагать эту задачу здесь и посоветовать читателю решить ее самостоятельно, предлагая ему в помощь фиг. 13, на случай, если это потребуется.¹⁸



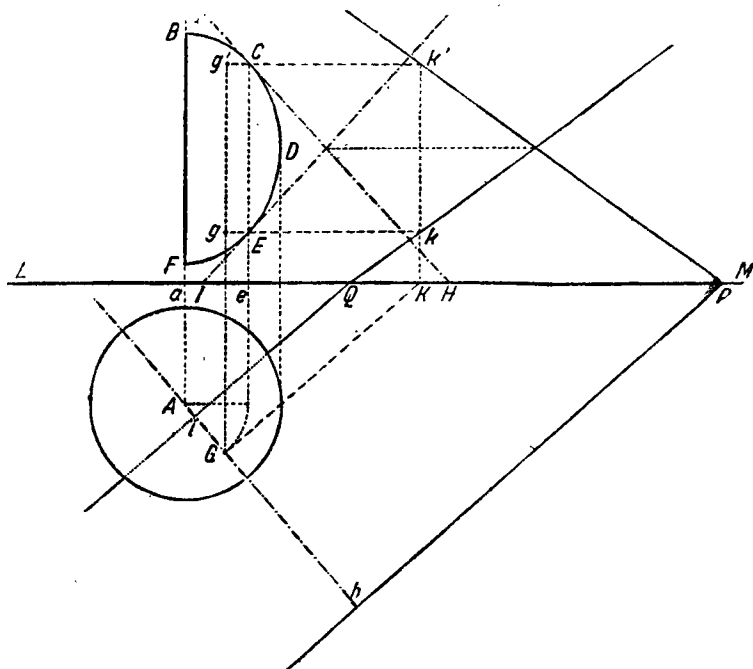
Фиг. 13.

30. Задача третья. Через точку, лежащую на поверхности вращения с вертикальной осью и заданную горизонтальной проекцией, провести касательную плоскость к поверхности.

Решение. Пусть A (фиг. 14) заданная горизонтальная проекция оси, aa' — ее вертикальная проекция, $BCDEF$ — заданная образующая кривая, расположенная в плоскости, проведенной через ось; G — заданная горизонтальная проекция точки касания.

Если через точку касания и через ось провести вертикальную плоскость, проекцией которой будет неопределенная горизонталь AG ,¹⁹ то эта плоскость пересечет поверхность вращения по кривой, которая будет образующей, проходящей

через точку касания; если через точку G провести вертикаль, она пересечется с образующей, а следовательно, с поверхностью в одной или нескольких точках, которые будут все точками касания с их общей горизонтальной проекцией G .



Фиг. 14.

Все эти точки касания в плоскости образующей будут найдены, если отложить на прямой LM отрезок ae , равный AG , и провести через точку e прямую, параллельную aa' ; все точки E, C , в которых эта прямая пересечет кривую $BCDEF$ будут пересечениями образующей кривой с вертикалью, проведенной через точку G , и определяют высоты всех точек касания над горизонтальной плоскостью. Чтобы

найти вертикальные проекции этих точек касания, проведем через все точки E, C неопределенные горизонтали, на которых будут лежать эти проекции; но они должны также находиться на перпендикуляре к LM , проведенном через точку G ; пересечения g, g' этой прямой с горизонталями будут проекциями различных точек касания.

Действительно, если через каждую точку касания провести сечение горизонтальной плоскостью, то это сечение, которое может быть рассмотрено как вторая образующая, будет окружностью круга, с центром на оси, касательная к которой, перпендикулярная радиусу в точке касания, будет также перпендикулярна вертикальной плоскости, проведенной через AG , в которой лежит радиус; следовательно, касательная плоскость, заключающая эту касательную, будет также перпендикулярна той же вертикальной плоскости, и ее след в горизонтальной плоскости будет перпендикулярен AG . Чтобы найти след каждой из касательных плоскостей, остается только найти ее расстояние до точки A . Но если через точки E, C провести к первой образующей касательные EI, CH , продолженные до пересечения с LM в точках I, H , то прямые AI, AH будут равны этим расстояниям; следовательно, если отложить отрезки Ai и Ah , равные им, и через точки i и h провести к AG перпендикуляры iQ, hP , продолженные до пересечения с прямой LM , то мы получим следы всех касательных плоскостей в горизонтальной плоскости.

Чтобы найти следы тех же плоскостей в вертикальной плоскости, надо провести в каждой точке касания, в соответствующей касательной плоскости, горизонталь, продолженную до вертикальной плоскости проекций; эта прямая, которая есть не что иное, как касательная к окружности, определит на этой плоскости точку, которая будет принадлежать следу. Эти прямые имеют для всех точек касания общую проекцию горизонтали; а именно, прямую GK , проведенную через точку G перпендикулярно AG до пересечения с прямой LM . Если через точку K провести к LM неопреде-

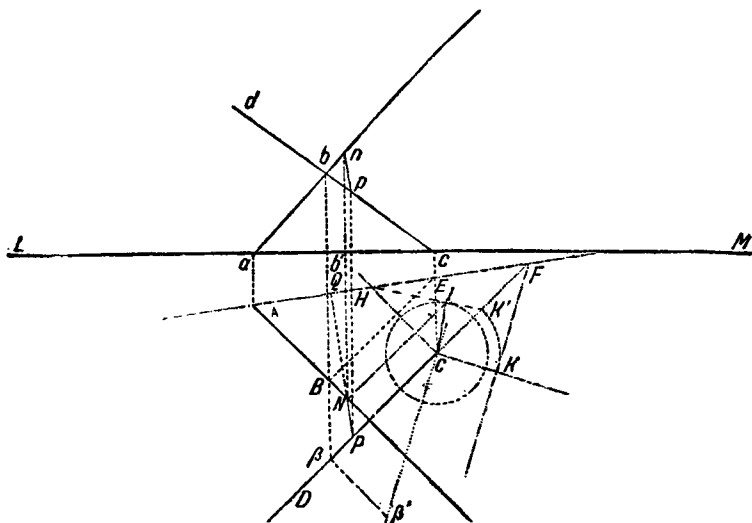
ленный перпендикуляр Kkk' , то все точки пересечения горизонталей с вертикальной плоскостью проекций будут лежать на нем. Но эти точки пересечения должны также находиться на соответственных горизонталях, проведенных через точки E, C , следовательно каждая из точек пересечения k, k' этих горизонталей с вертикалью Kk' будет точкой следа одной из касательных плоскостей. Таким образом, прямая Qk будет следом одной из касательных плоскостей в вертикальной плоскости; прямая Pk' будет следом другой и т. д., если их имеется большее число.²⁰

Мы ограничимся тремя рассмотренными примерами, так как их достаточно для всех поверхностей, происхождение которых мы описали. В дальнейшем в этой книге мы будем рассматривать бесконечно более разнообразные случаи образования семейств поверхностей и будем применять тот же метод нахождения их касательных поверхностей и их нормалей. Теперь же рассмотрим еще одну задачу, для решения которой с успехом может быть применено рассмотрение касательной плоскости.

31. Задача четвертая. Две прямые (фиг. 15) заданы их горизонтальными проекциями AB, CD и их вертикальными проекциями ab, cd . Построить проекции кратчайшего расстояния между обеими прямыми, т. е. прямую, перпендикулярную одновременно обеим прямым, и найти величину этого расстояния.

Решение. Через первую из заданных прямых проведем плоскость, параллельную второй; это всегда возможно, потому что если через любую точку первой прямой провести прямую, параллельную второй, и считать, что эта третья прямая движется параллельно самой себе вдоль первой, то она и образует плоскость, о которой идет речь. Построим цилиндрическую поверхность с круговым основанием, осью которой служит вторая заданная прямая и радиусом — искомое расстояние; эта поверхность будет иметь касание с плоскостью по прямой, которая будет параллельна оси и пересечет

в некоторой точке первую прямую. Если через эту точку провести перпендикуляр к плоскости, он и будет искомой прямой, так как она действительно пройдет через некоторую точку на первой данной прямой и будет ей перпендикулярна, как линия, перпендикулярная к плоскости, проходящей через эту прямую; она пересечет перпендикулярно также и вторую



Фиг. 15

прямую, поскольку она является радиусом цилиндра, осью которого служит вторая прямая.

Остается последовательно построить все части этого решения.

1°. Чтобы построить следы плоскости, параллельной двум заданным прямым, мы проведем через любую точку первой прямой прямую, параллельную второй; проекции этой прямой будут параллельны прямым CD , cd . Так как прямая cd пересечет прямую ab в точке b , то, если из этой точки опустить перпендикуляр bb' B на пересечение плоскостей проекций

LM , и если провести через некоторую точку, лежащую на первой прямой и заданную проекциями B и b , прямую, параллельную второй прямой, эта последняя будет иметь своей горизонтальной проекцией прямую BE и вертикальной прямую cd ; она пересечет горизонтальную плоскость в точке E , которую мы получим, проводя прямую CE перпендикулярно пересечению плоскостей проекции LM . Следовательно, если соединить прямой точки A и E , то эта прямая и будет следом плоскости, параллельной двум данным прямым.

2°. Чтобы построить линию касания с цилиндрической поверхностью плоскости, параллельной двум заданным прямым, надо принять во внимание, что эта линия касания параллельна второй данной прямой и что одна единственная точка на этой линии определяет ее положение. Чтобы найти эту точку, надо провести через любую точку второй прямой, являющейся осью цилиндра (напр. через точку C , где она пересекает горизонтальную плоскость) плоскость, перпендикулярную этой оси; пересечение этой плоскости с плоскостью, параллельной двум заданным прямым, есть линия касания этой последней плоскости с круговым основанием цилиндрической поверхности.

Так как вертикальная плоскость CD повернута вокруг своего следа CD до совпадения с горизонтальной плоскостью, то для построения угла $\beta'C\beta$ между второй заданной прямой и горизонтальной плоскостью надо отложить отрезок $\beta'\beta$, равный $b'b$. Та же вертикальная плоскость CD пересекает плоскость, параллельную двум прямым, по прямой FK , параллельной $C\beta'$. Отсюда следует, что плоскость, перпендикулярная оси цилиндра и проведенная через точку C , пересекает вертикальную плоскость CD по прямой $СК$, перпендикулярной $C\beta'$ или FK , и горизонтальную плоскость — по прямой CH , перпендикулярной CD .

При вращении этой плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, вокруг ее горизонтального следа CH до совмещения с горизонтальной плоскостью, точка K опускается до K' ; точка H следа AE остается неподвижной, и прямая HK'

будет пересечением плоскости, касательной к цилиндрической поверхности с плоскостью, перпендикулярной оси этой поверхности. Следовательно, если из точки C опустить перпендикуляр CI на эту прямую HK' , то круг, описанный из точки C как из центра радиусом CI , будет основанием цилиндрической поверхности, и прямая IN , параллельная CD , — горизонтальной проекцией прямолинейной образующей касания. Эта образующая пересекает первую прямую в точке с проекциями N и n , через которую проходит перпендикуляр к обеим заданным прямым.

3°. Если известны проекции N и n одной из точек искомого общего перпендикуляра, то для нахождения проекций самого перпендикуляра будет достаточно провести через точку N прямую NPQ , перпендикулярную следу AE . Эта прямая пересекает горизонтальную проекцию CD второй заданной прямой в точке P , которая является концом горизонтальной проекции NP искомого перпендикуляра. Зная вертикальную проекцию этого перпендикуляра np , мы построим его величину способом, описанным для случая фиг. 3.

Рассмотрение цилиндрической поверхности, имеющей касательную плоскость, не было необходимым для решения предыдущей задачи. Можно было бы, вообразив себе плоскость, параллельную двум заданным прямым, провести через каждую из этих прямых плоскость, перпендикулярную ей; пересечение этих двух последних плоскостей было бы направлением искомого кратчайшего расстояния. Мы ограничимся здесь указанием на этот второй способ, предоставив читателю для упражнения самому сделать построения.²¹

Условия, определяющие положение плоскости, касательной к любой кривой поверхности; замечания о развертываемых поверхностях

32. В различных вопросах, которые мы рассматривали о плоскостях, касательных к кривым поверхностям, мы всегда предполагали, что точка, через которую надлежит провести

касательную плоскость, лежит на поверхности и что она сама является точкой касания; одного этого условия было достаточно, чтобы определить положение плоскости. Но это не то же самое, если точка, через которую надо провести плоскость, лежит вне поверхности.

Для того чтобы положение плоскости было определено, необходимо, чтобы она удовлетворяла трем различным условиям, каждое из которых эквивалентно условию прохождения через заданную точку; вообще говоря, свойство плоскости быть касательной к некоторой заданной кривой поверхности, если точка касания не определена, эквивалентно только одному из этих условий. Таким образом, если ставится задача об определении положения условиями такого рода, то их надо иметь, вообще, три. Действительно, вообразим, что мы имеем три заданные кривые поверхности и плоскость, касательную в некоторой точке к одной из них, и положим, что эта плоскость движется вокруг поверхности, не переставая ее касаться; движение может происходить во всех направлениях, но точка касания будет двигаться по поверхности по мере того, как касательная плоскость будет менять свое положение, причем точка касания будет двигаться в том же направлении, что и плоскость. Положим, что это движение происходит в некотором направлении до тех пор, пока плоскость не встретится со второй поверхностью и не коснется ее в некоторой точке; тогда плоскость будет одновременно касательной к двум первым поверхностям, но ее положение этим еще не определено. Мы можем предположить в действительности, что плоскость вращается вокруг обеих поверхностей, не переставая касаться той и другой. Она не будет больше, как раньше, иметь свободы двигаться во всех направлениях и сможет совершать движение только в одном направлении. По мере того как плоскость будет изменять свое положение, обе точки касания будут двигаться каждая по поверхности, к которой она принадлежит; таким образом, если мы рассмотрим прямую, проведенную через эти две точки, то движение точек относительно

этой прямой будет происходить в одном направлении, если плоскость касается обеих поверхностей с одной стороны, и в противоположных, если плоскость касается поверхностей с разных сторон. Наконец, заметим, что это движение, единственное, которое еще может иметь место, продолжается до тех пор, пока плоскость не коснется в некоторой точке третьей поверхности; тогда положение плоскости будет зафиксировано, и она не сможет больше двигаться, не переставая быть касательной к одной из трех поверхностей.

Итак, чтобы определить положение плоскости неопределенными касаниями с заданными кривыми поверхностями, их должно быть, вообще говоря, три. Таким образом, если бы задача состояла в проведении касательной плоскости к заданной кривой поверхности, это условие было бы равносильно только одному из трех, которым должна удовлетворять плоскость; можно было бы задать произвольно еще два условия, например, чтобы плоскость проходила через две заданные точки или, что равносильно, через заданную прямую. Если бы требовалось, чтобы плоскость была касательной одновременно к двум поверхностям, то были бы использованы только два условия; можно было бы воспользоваться еще одним и, следовательно, поставить требование, чтобы плоскость проходила еще через одну заданную точку. Наконец, если плоскость должна касаться одновременно трех поверхностей, мы не можем располагать больше ни одним условием, и тем самым положение плоскости будет определено.

Только что сказанное касается кривых поверхностей вообще; однако отсюда надо исключить все цилиндрические, конические и развертываемые поверхности; для этого рода поверхностей касание с плоскостью не ограничивается одной единственной точкой, но распространяется на всю длину неопределенной прямой, которая совпадает с образующей в одном из ее положений. Если бы плоскость была подчинена условию касаться одной из таких поверхностей, то это было бы равносильно двум условиям, потому что плоскость должна

была бы проходить через прямую; следовательно, осталось бы только одно свободное условие, как, например, — проходить через заданную точку. Поэтому нельзя ставить задачу о построении плоскости, касательной одновременно к двум таким поверхностям и, тем более, к трем, если только нет каких-либо особых обстоятельств, делающих эти условия совместимыми.

О плоскостях, касательных к поверхностям и проходящих через точки, заданные вне этих поверхностей

33. Было бы, может быть, не бесполезно, прежде чем идти дальше, дать несколько примеров на построение касательных плоскостей к кривым поверхностям через точки, лежащие вне их. Первый из этих примеров возьмем из фортификации.

При изложении общих принципов фортификации прежде всего полагают, что местность, окружающая крепость, горизонтальна во всех направлениях на расстоянии пушечного выстрела и не имеет никаких возвышенностей, которые могли бы представить некоторые преимущества осаждающему; затем, в этом предположении разрабатывается трасировка главной крепостной ограды, люнетов, крытых ходов, передовых верков; затем намечается порядок командования, которое различные части укрепления должны иметь одно над другим для наиболее эффективного участия всех их во взаимной обороне. Наконец, если применить эти принципы к случаю, когда окружающая местность имеет какую-нибудь высоту, которой осаждающие могли бы воспользоваться и от которой надо защитить крепость, остается воспользоваться еще одним новым соображением. Если имеется только одна высота, то в этой местности выбирают две точки, через которые проводят плоскость, касательную к высоте, от которой желательно защититься; эта касательная плоскость называется *плоскостью дефилады*; всем частям

крепости придают тот же рельеф над плоскостью дефилады, который они имели бы над горизонтальной плоскостью, если бы местность была горизонтальной; таким путем эти части имеют одна над другой и все вместе над соседней высотой то же командование, как и в горизонтальной местности; укрепленный район при этом обладает теми же преимуществами, что и в предыдущем случае. Что касается выбора двух точек, через которые должна проходить плоскость дефилады, то они должны удовлетворять двум следующим условиям: 1) чтобы угол, составленный этой плоскостью с горизонтом, был бы возможно меньшим, так, чтобы валганги²² имели наименьший наклон, и служба защиты встречала бы наименьшие трудности; 2) поднятие укрепления над естественной местностью должно быть также возможно меньшим, дабы постройка требовала меньших работ и расходов.

Если в окрестности крепости имеются две высоты, от которых требуется защитить укрепления, плоскость дефилады должна быть одновременно касательной к поверхностям этих двух высот; для фиксирования ее положения остается только одно свободное условие, которым и пользуются, а именно: на местности выбирают точку, через которую должна пройти эта плоскость, так, чтобы она как можно лучше удовлетворяла условиям, изложенным в первом случае.

34. Второй пример мы возьмем из живописи.

Поверхности тел, в особенности гладких, обладают блестящими точками, сравнимыми по яркости с освещающим их источником света. Яркость этих точек тем больше, и размеры их тем меньше, чем более гладкой является поверхность. На матовых поверхностях блестящие точки имеют значительно меньшую яркость и занимают большее пространство на поверхности.

Положение яркой точки определяется для каждой поверхности условием, чтобы падающий луч света и отраженный луч, направленный к глазу зрителя, лежали в одной плоскости,

перпендикулярной касательной плоскости в этой точке, и составляли бы с этой плоскостью равные углы, так как блестящая точка поверхности играет роль зеркала и отражает по направлению к глазу часть изображения светящегося предмета. Определение этой точки требует крайней точности, и даже, если рисунок выполнен с величайшей правильностью, если видимые контуры проведены с математической точностью, малейшая ошибка в положении блестящей точки вызовет неверное впечатление при рассматривании формы. Мы приведем только одно, но зато очень убедительное и часто встречающееся доказательство.

Поверхность глазного яблока блестящая. Кроме того, она покрыта легким слоем влажности, которая делает ее еще более блестящей; когда мы рассматриваем открытый глаз, то видим на его поверхности маленькую очень яркую точку, положение которой зависит от положения освещающего объекта и наблюдателя. Если бы поверхность глаза была совершенно сферической, его вращение вокруг своей вертикальной оси не вызывало бы ни малейшего смещения блестящей точки, но эта поверхность вытянута в направлении оси зрения, и когда она поворачивается вокруг вертикальной оси, положение блестящей точки изменяется. Поскольку опыт сделал нас очень чувствительным к этому изменению, оно играет большую роль в нашем суждении о направлении взгляда. Именно разница в положении блестящих точек в двух глазных яблоках человека и дает возможность судить о том, косит ли он или нет, смотрит ли он на нас, и, если не смотрит, то куда направлен его взгляд.

Приведя этот пример, мы не хотим сказать, что на картине нужно геометрическим путем определять положение блестящей точки на глазном яблоке, мы только обращаем внимание на то, что незначительные ошибки в положении этой точки вызывают большие последствия в воспринимаемой форме объекта, хотя рисунок его видимого контура остается неизменным.

О плоскости, касательной к поверхности одного или нескольких шаров. Замечательные свойства круга, шара, конических сечений и кривых поверхностей второго порядка

35. Перейдем теперь к определению касательных плоскостей к кривым поверхностям, проведенных через точки, не лежащие на поверхности.

Поверхность шара — одна из самых простых. Она может быть образована различными способами, общими с большим числом различных поверхностей; ее можно было бы, например, причислить к поверхностям вращения и не говорить ничего о ней в частности. Но ее правильность приводит к замечательным следствиям, часть из которых интересна своей новизной и которыми мы прежде всего и займемся, не столько ради них самих, сколько для того, чтобы приобрести в изучении трех измерений опыт, который нам будет необходим для более общих и полезных случаев.

36. Задача первая. Через заданную прямую провести плоскость, касательную к поверхности заданного шара.

Решение. Первый способ. Пусть A и a (фиг. 16) будут две проекции центра шара, BCD проекция горизонтального большого круга, EF и ef — две случайные проекции заданной прямой; пусть через центр шара проведена плоскость, перпендикулярная прямой, и пусть построены по данному нами методу (фиг. 6) проекции G и g точки пересечения прямой с плоскостью.

Очевидно, что через данную прямую можно провести две плоскости, касательные к шару, из которых первая коснется его с одной, а вторая с другой стороны, и между которыми он будет заключен; таким образом определятся две различных точки касания, проекции которых должны быть построены прежде всего.

Если из центра шара опустить перпендикуляры на касательные плоскости, каждый из них будет иметь своим концом

точку касания поверхности шара с соответствующей плоскостью; они будут оба лежать в плоскости, перпендикулярной заданной прямой; следовательно, обе точки касания будут находиться в сечении шара перпендикулярной плоскостью; сечение это будет окружностью одного из больших кругов шара, а оба пересечения касательных плоскостей той же плоскостью будут касательны к этой окружности.

Проведем через центр шара горизонталь в перпендикулярной плоскости; вертикальную проекцию горизонтали получим, проведя горизонталь ah , а другую проекцию, — опуская перпендикуляр AH на EF ; если вообразить, что перпендикулярная плоскость вращается вокруг этой горизонтали, как на шарнире, до того, пока она сама не станет горизонтальной, то очевидно, что ее сечение поверхностью шара совместится с окружностью BCD , что обе точки касания будут лежать на этой окружности и что, если построить точку I , в которой при этом движении находится пересечение перпендикулярной плоскости с заданной прямой, — касательные IC , ID , проведенные к кругу BCD , определяют эти две точки касания в том положении, в котором они теперь рассматриваются. Нетрудно построить точку I или, что равносильно, найти ее расстояние до точки H ввиду того, что горизонтальная проекция этого расстояния есть GH , и разность вертикальных высот ее концов есть gg' ; если отложить на горизонтали ah отрезок $g'h$, равный GH , — гипотенуза hg будет равна по величине этому расстоянию; следовательно, откладывая на EF отрезок HI , равный gh , и проведя обе касательные IC , ID , мы определим точки касания C и D в положении, занятом ими после совмещения перпендикулярной плоскости с горизонтальной.

Для нахождения проекций этих точек в их положении до поворота, надо представить себе, что перпендикулярная плоскость возвращается в свое первоначальное положение вращением вокруг горизонтали AH , как вокруг шарнира, и при этом увлекает за собой точку I , обе касательные IC , ID , продолженные до пересечения с AH в точках K и K' , и хорду

CD , которая также пересечет ту же прямую $АН$ в некоторой точке N . Очевидно, что в этом движении точки K , K' и N , как лежащие на шарнире, будут неподвижны, и что обе точки касания C и D опишут дуги круга, которые будут лежать в плоскостях, перпендикулярных шарниру, и горизонтальные проекции которых мы получим, опуская на $АН$ из точек C и D неопределенные перпендикуляры CP , DQ . Поэтому горизонтальные проекции обеих точек касания будут находиться на прямых CP , DQ . Но при обратном движении перпендикулярной плоскости обе касательные ICK' , IKD будут все время проходить через соответственные точки касания, и, когда эта плоскость возвратится в свое первоначальное положение, точка I будет снова проектироваться в G , а обе касательные будут проектироваться в виде прямых GK' , GK . Следовательно, на каждой из этих двух последних прямых должна лежать горизонтальная проекция одной из точек касания, и, наконец, пересечения этих двух прямых с соответственными прямыми CP , DQ определяют горизонтальные проекции R и S обеих точек касания, которые окажутся на одной прямой с точкой N .

Для нахождения вертикальных проекций тех же точек проведем сначала к LM неопределенные перпендикуляры Rr , Ss ; затем, проектируя точки K , K' в k , k' и проводя через точку g прямые gk , gk' , получим вертикальные проекции тех же двух касательных. Проекции соответственных точек касания будут, следовательно, лежать на этих прямых, и точки r , s их пересечения с вертикалями Rr , Ss будут искомыми проекциями.

После того как найдены горизонтальные и вертикальные проекции точек касания, проведем для построения горизонтальных следов обеих касательных плоскостей через каждую точку касания прямую, параллельную заданной прямой. Эти прямые будут лежать в соответственных касательных плоскостях, и их горизонтальную и вертикальную проекции получим проведя RU , SV параллельно EF и ru , sv параллельно ef . Построим в горизонтальной плоскости след T заданной прямой и следы

U , V двух последних прямых; прямые TU , TV будут следами двух касательных плоскостей.

Вместо того чтобы проводить через точки касания новые прямые, можно найти следы двух касательных GR , GS , что привело бы к той же цели. Что касается следов обеих этих плоскостей в вертикальной плоскости, мы найдем их по ранее применявшемуся способу.

Это решение могло быть сделано значительно более изящным, если бы провести обе плоскости проекций через самый центр шара. При этом обе проекции шара совместились бы в одном круге, и продолжения прямых линий были бы менее длинными. Мы разделили обе проекции только для большей ясности изложения. На самом деле легко было сделать построение значительно более сжатым.

37. Второй способ. Пусть A и a (фиг. 17) — две проекции центра шара, AB или ab — проекции его радиуса, BCD — проекция горизонтального большого круга, и EF , ef проекции заданной прямой.

Если продолжить плоскость горизонтального большого круга до пересечения с заданной прямой в некоторой точке, то мы получаем вертикальную проекцию этой плоскости, проведя через точку a неопределенную горизонталь bag ; точка g , в которой эта горизонталь пересекает ef , будет вертикальной проекцией точки пересечения плоскости с заданной прямой; горизонтальную же проекцию G этой точки получим, проектируя g на EF .

Приняв эту самую точку за вершину, опишем вокруг шара коническую поверхность; все прямолинейные ее образующие касаются его каждая в одной точке; мы получим проекции двух горизонтальных прямолинейных образующих этой конической поверхности, проводя через точку G прямые GC , GD , касательные к кругу BCD в двух точках C и D , которые легко определить. Коническая поверхность коснется поверхности шара по окружности, диаметром которой будет прямая CD ;

плоскость ее будет перпендикулярна оси конуса, и, следовательно, вертикальна; поэтому горизонтальной проекцией круга будет прямая CD .

Если проведем через заданную прямую две плоскости, касательные к конической поверхности, то каждая из них коснется ее по одной из этих прямолинейных образующих, лежащих одновременно и на конической поверхности и на плоскости; в виду того, что эта прямолинейная образующая касается также поверхности шара в одной из ее точек, лежащих на окружности круга, проектируемого на CD , эта точка находится одновременно на конической поверхности, на плоскости касательной к ней, на поверхности шара и на окружности круга с проекцией CD , и тем самым она является точкой касания, общей для всех этих фигур. Следовательно: 1) обе плоскости, касательные к конической поверхности, будут также касательны к поверхности шара и являются теми, положение которых и нужно определить; 2) так как их точки касания с шаром лежат на окружности круга, проектируемого в CD , то и сами они должны проектироваться где-то на эту прямую; 3) так как прямая, проходящая через обе точки касания, сама лежит в плоскости того же круга, она также будет неопределенно проектироваться на CD .

Теперь повторим для плоскости большого круга, параллельного вертикальной плоскости проекций, ту же самую операцию, которую мы только что выполнили для плоскости горизонтального большого круга. Горизонтальной проекцией этой плоскости будет прямая $ВАН$, параллельная LM ; точка пересечения этой плоскости с заданной прямой будет проектироваться горизонтально в пересечении H двух прямых EF и $ВАН$; вертикальную ее проекцию получим в точке h , проектируя точку H на ef . Если мы построим другую коническую поверхность с вершиной в этой точке пересечения, которая описана вокруг шара подобно первой, то мы найдем вертикальные проекции предельных прямолинейных образующих этой поверхности, проведя через точку h касательные hK, hI

к кругу bKI , и определив положение точек касания K , I . Эта вторая коническая поверхность коснется шара по окружности нового круга с диаметром KI , плоскость которого, перпендикулярная к вертикальной плоскости проекций, будет (неопределенно) проектироваться на KI . Окружность этого круга также пройдет через две точки касания шара с искомыми касательными плоскостями; следовательно, вертикальные проекции этих двух точек касания будут лежать где то на KI , и прямая, соединяющая обе эти точки, будет проектироваться на ту же прямую KI .

Итак, прямая, проведенная через обе точки касания, проектируется горизонтально в CD и вертикально в KI ; она встречается плоскость горизонтального большого круга в точке, вертикальная проекция которой n лежит в пересечении KI с bag ; горизонтальную проекцию ее найдем, проектируя точку n на CD .

После этого представим себе, что плоскость вертикального круга, проектируемого в CD , поворачивается вокруг своего горизонтального диаметра, как вокруг шарнира, чтобы самой стать горизонтальной, и что она увлекает за собой в своем движении обе точки касания, через которые проходит окружность, и прямую, соединяющую эти точки. Мы построим этот круг в его новом положении, описывая на CD , как на диаметре, круг $CPDQ$, и если бы мы построили прямую, соединяющую обе точки касания, то она пересекала бы окружность $CPDQ$ в двух точках, определяющих положение точек касания на этой окружности, рассмотренной в ее горизонтальном положении.

Но точка N , лежащая на прямой, соединяющей обе точки касания, лежит на ширнуре CD и потому не меняет своего положения при движении. Следовательно, эта прямая должна проходить через эту точку и тогда, когда она приняла горизонтальное положение. Кроме того, точка, в которой она встречается плоскость большого круга, параллельного вертикальной плоскости проекции, точка, горизонтальная проекция которой лежит в пересечении O двух прямых CD , BAH и вертикальная проекция которой t будет получена проекти-

рованием точки O на KI — эта точка в своем движении вокруг шарнира опишет четверть вертикального круга, перпендикулярного CD , радиусом которому будет служить вертикаль ot ; следовательно, если провести через точку O перпендикуляр к CD и отложить на нем отрезок OT , равный ot , точка T будет одной из точек прямой, соединяющей точки касания, принявшей горизонтальное положение. Следовательно, если через точки N и T провести прямую, ее две точки встречи P и Q с окружностью $CPDQ$ и будут двумя точками касания в повернутой вертикальной плоскости.

Для того чтобы получить горизонтальные проекции тех же двух точек в их естественном положении, надо представить себе, что круг $CPDQ$ возвращается в свое первоначальное положение, вращаясь вокруг того же шарнира CD . В этом движении эти две точки P и Q опишут четверти круга в вертикальных плоскостях, перпендикулярных CD , горизонтальными проекциями которых будут перпендикуляры PR и QS опущенные на CD . Следовательно, горизонтальные проекции двух точек касания будут лежать соответственно на прямых PR и QS ; но мы видели, что они должны лежать также на CD ; следовательно, они будут лежать в двух точках пересечения R и S .

Вертикальные проекции r и s обеих этих точек мы получим, проектируя точки R и S на KI ; или, что равносильно, откладывая на вертикалях Rr , Ss от горизонтали bag отрезки: $r'r$, равный PR , и $s's$, равный QS .

После того как построены горизонтальные и вертикальные проекции двух точек касания, мы определим следы двух касательных плоскостей, как и в первом решении.

Второе решение также может быть значительно сокращено, если провести плоскости проекций через центр сферы; этим самым обе проекции сведутся к одной фигуре.

38. Эти последние соображения приведут нас к открытию некоторых замечательных свойств круга, шара, конических сечений и кривых поверхностей второго порядка.

Мы видели, что обе конические поверхности, описанные вокруг шара, касались его каждая по окружности круга и что эти окружности проходили обе через две точки касания шара с касательными плоскостями. Это свойство не является присущим только двум коническим поверхностям, рассмотренным нами, оно относится ко всем поверхностям, вершина которых лежала бы на заданной прямой и которые были бы описаны вокруг шара.

Если мы рассмотрим первую коническую поверхность с вершиной на заданной прямой, описанную вокруг шара, и предположим, что эта поверхность движется таким образом, что ее вершина скользит по прямой и при этом она все время остается описанной около шара и касательной к нему, то в каждом из своих положений коническая поверхность будет касаться шара по окружности круга; все окружности будут проходить через те же две точки, которые будут точками касания шара с двумя касательными плоскостями, и плоскости этих кругов пересекутся все по одной прямой линии, проходящей через обе точки касания. Наконец, если мы рассмотрим плоскость, проходящую через заданную прямую и центр шара, то эта плоскость, проходящая через оси всех конических поверхностей, будет перпендикулярна и плоскостям всех окружностей касания, и, следовательно, прямой, являющейся их общим пересечением; она пересечет все эти плоскости по прямым линиям, проходящим через одну точку.

Обратно, если заданы шар и прямая линия, и мы проведем через эту прямую сколько угодно плоскостей, пересекающих шар каждая по окружности, и если каждый из этих кругов мы примем за основание прямой конической поверхности, описанной вокруг шара, то вершины всех этих конических поверхностей будут лежать на одной прямой, отличной от первой.

39. Рассматривая только то, что происходит в плоскости, проведенной через заданную прямую и центр шара, мы приходим

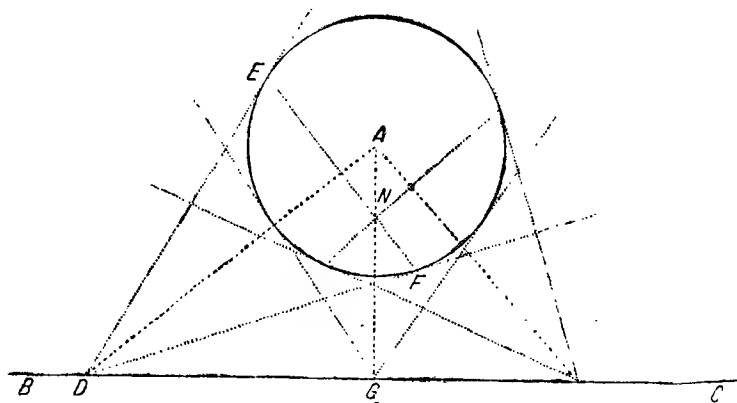
к двум следующим теоремам, являющимся непосредственным следствием предыдущего.

„На плоскости (фиг. 18 и 19) заданы круг с центром в точке A и некоторая прямая BC ; если через некоторую точку D этой прямой проведем две касательные к кругу и прямую EF , проходящую через обе точки касания, и положим, что точка D движется вдоль прямой, увлекая за собой обе касательные, которые не перестают касаться круга, — обе точки касания будут изменять свое положение так же, как и соединяющая их прямая EF ; но эта прямая будет всегда проходить через точку N , лежащую на перпендикуляре AG , опущенном из центра круга на прямую“.

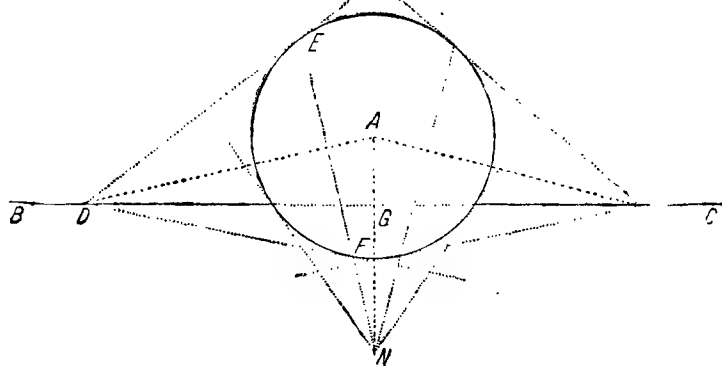
„Обратно, если через точку N , лежащую в плоскости круга, провести сколько угодно прямых EF , пересекающих окружность круга в двух точках, и если через эти две точки провести к кругу две касательные ED , FD , которые пересекутся в некоторой точке D , то все точки пересечения, найденные таким же образом, будут лежать на одной прямой BC , перпендикулярной AN “.

Круг обладает только что изложенным свойством не потому, что все точки окружности одинаково удалены от центра, но потому, что он является кривой второго порядка; и это положение относится ко всем коническим сечениям.

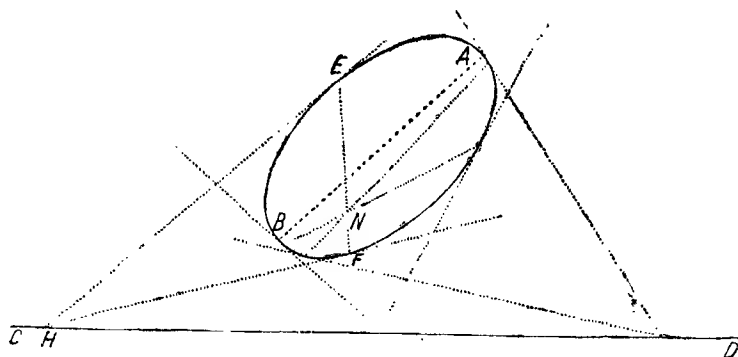
Действительно, пусть $AEBF$ (фиг. 20) какое угодно коническое сечение, и CD любая прямая, лежащая в его плоскости; пусть кривая вращается вокруг одной из своих осей AB , образуя поверхность вращения; проведем через прямую CD две касательные плоскости к этой поверхности; каждая из них будет иметь свою точку касания. Если, приняв за вершину некоторую точку H прямой CD , построим коническую поверхность, описанную около поверхности вращения и касательную к ней, она коснется этой последней поверхности по кривой, по необходимости проходящей через обе точки касания с касательными плоскостями. Эта кривая будет плоская: ее плоскость, перпендикулярная плоскости данного кониче-



Фиг. 18.



Фиг. 19.



Фиг. 20.

ского сечения будет проектироваться на последнюю по прямой EF , и эта прямая пройдет через точки касания конического сечения с касательными, проведенными через точку H . Действительно, если предположить, что вершина H конической поверхности движется по прямой CD , оставаясь касательной и описанной вокруг поверхности вращения, то кривая касания во всех ее положениях будет обладать теми же свойствами: проходить через обе точки касания с касательными плоскостями, быть плоской и лежать в плоскости, перпендикулярной коническому сечению. Следовательно, плоскости всех кривых касания пройдут через прямую, соединяющую две точки касания и перпендикулярную плоскости конического сечения, и, наконец, проекции всех плоскостей будут прямыми линиями, проходящими через проекцию N прямой, соединяющей точки касания.

40. Наконец, эта теорема сама является частным случаем другой, более общей для трех измерений, которую мы дадим без доказательства.

„Пусть задана в пространстве какая угодно кривая поверхность второго порядка и описанная вокруг нее коническая поверхность, касательная к ней, вершина которой лежит в какой угодно точке; если коническая поверхность движется, не переставая быть описанной вокруг первой поверхности и касаться ее таким образом, однако, что ее вершина скользит по некоторой прямой, то плоскость кривой касания двух поверхностей будет всегда проходить через одну и ту же прямую (определяемую точками касания поверхности второго порядка с двумя касательными плоскостями, проходящими через прямую, соединяющую вершины); и если коническая поверхность движется таким образом, что ее вершина всегда лежит в одной плоскости, плоскость кривой касания будет всегда проходить через одну и ту же точку“.²³

на продолжении ab . Наконец, построим проекции CD , cd прямой, проведенной через вершину конуса и заданную точку. Если теперь через эту последнюю прямую провести две плоскости, касательные к конической поверхности, то каждая из них коснется ее по одной из ее прямолинейных образующих, и, следовательно, они будут обе одновременно касательными к обоим шарам. Таким образом, вопрос сводится к проведению через прямую, соединяющую вершину конуса и заданную точку, двух плоскостей, касательных к поверхности одного из шаров, что выполняется, как в предыдущем случае, и обе плоскости будут одновременно касательными ко второму шару.

Заметим, что можно рассматривать две конические поверхности, описанные вокруг обоих шаров. Первая обертывает оба шара снаружи, и ее вершина лежит по одну сторону от обоих шаров; плоскости, касательные к этой конической поверхности, касаются обоих шаров одной стороной. Вторая коническая поверхность обертывает один шар снаружи, другой изнутри, и вершина ее лежит между центрами шаров. Чтобы найти горизонтальную проекцию D' этой вершины, проведем к кругам EFG , HIK внутренние касательные, которые пересекутся в некоторой точке прямой AB , и чтобы найти ее вертикальную проекцию, надо спроектировать точку D' на прямую ab в точку d' . Каждая из касательных плоскостей к этой конической поверхности будет также касаться обоих шаров, но они будут касаться одного шара с одной, другого — с другой стороны. Таким образом, четыре различные плоскости удовлетворяют требуемому условию: относительно двух из них — оба шара будут лежать с одной стороны, и относительно двух других — они будут лежать с разных сторон.

42. Задача третья. Провести плоскость, касательную одновременно к трем шарам, положение и размеры которых заданы.

Решение. Рассмотрим плоскость, касательную одновременно к трем шарам, и представим себе сначала коническую поверхность, описанную вокруг двух первых шаров, касательную к ним обоим; касательная плоскость коснется этой конической поверхности вдоль одной из ее прямолинейных образующих и пройдет через вершину конуса. Если представим себе вторую коническую поверхность, описанную вокруг первого и третьего шаров, то та же касательная плоскость коснется ее вдоль одной из ее прямолинейных образующих и пройдет, следовательно, через ее вершину. Наконец, если мы рассмотрим третью коническую поверхность, которая обертывает и касается второго и третьего шаров, то касательная плоскость также коснется и ее вдоль одной из ее прямолинейных образующих и пройдет через ее вершину. Таким образом, вершины трех конических поверхностей будут лежать в касательной плоскости; но они будут лежать также в плоскости, проходящей через центры шаров, заключающей и все три оси; следовательно, они будут лежать одновременно в двух различных плоскостях, т. е. на одной прямой. Отсюда следует, что если мы построим, как указано в предыдущей задаче, горизонтальные и вертикальные проекции этих вершин, для чего достаточно двух, — то через эти проекции можно будет провести проекции некоторой прямой, лежащей в касательной плоскости. Вопрос сводится, следовательно, к проведению через заданную прямую плоскости, касательной к любому из трех шаров, что может быть выполнено изложенными раньше способами; эта плоскость будет также касательна и к двум другим шарам.

43. Надо заметить, что поскольку для двух любых шаров можно всегда рассматривать две конические поверхности, описанные около них и касательные к ним, так, что вершина первой из них будет лежать с одной стороны от обоих центров, а вершина второй между обоими центрами, то очевидно, что в предыдущем случае мы будем иметь шесть конических

поверхностей, из которых три будут описаны снаружи по отношению к трем шарам, взятым попарно, и вершины трех других будут лежать между шарами. Вершины этих шести конусов будут распределены по три на четырех прямых, через каждую из которых можно провести две плоскости, одновременно касательные ко всем трем шарам. Таким образом, этой третьей задаче удовлетворяют восемь различных плоскостей: две из них касаются всех трех шаров с одной стороны относительно них, шесть других расположены таким образом, что они касаются двух шаров с одной и третьего с другой стороны.

44. Эти соображения приводят нас к следующей теореме:

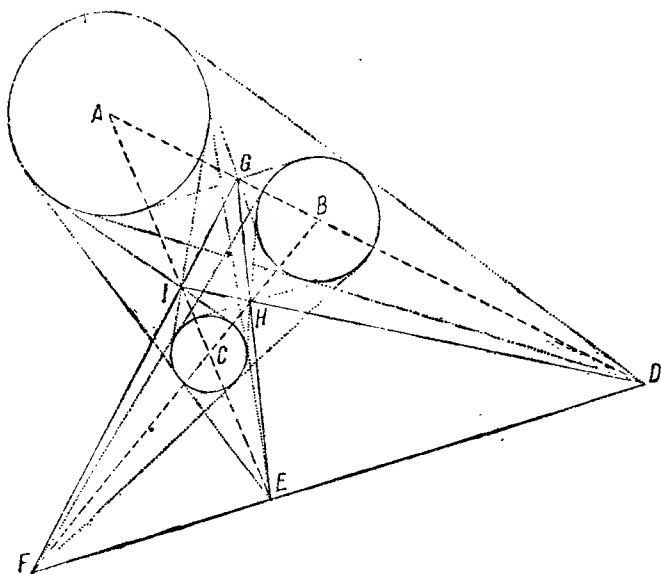
„Если дано положение и размеры трех каких угодно кругов на плоскости (фиг. 22) и если, рассматривая их попарно, провести к ним внешние касательные, продолженные до их взаимного пересечения, то три точки пересечения D, E, F , полученные таким образом, будут лежать на одной прямой“.

Ибо, если рассматривать три шара, для которых эти круги будут большими кругами, и плоскость, извне касающуюся их всех, то эта плоскость коснется также и трех конических поверхностей, описанных около этих шаров, взятых попарно, и пройдет через их три вершины D, E, F . Но эти три вершины лежат в той же плоскости, что и три центра; следовательно, они лежат в двух разных плоскостях и, значит, — на одной прямой. „Если к тем же кругам, взятым попарно, провести внутренние касательные, которые пересекутся между собой, то эти три новые точки пересечения G, H, I будут попарно лежать на одной прямой с одной из трех первых точек; таким образом, шесть точек D, E, F, G, H, I будут пересечением четырех прямых“.

Наконец, эта теорема представляет только частный случай следующей, справедливой для трех измерений.

„Если задано положение и размеры четырех каких угодно шаров в пространстве, и если рассмотреть шесть конических поверхностей, извне описанных вокруг этих шаров, взятых

попарно, то вершины шести конусов будут лежать в одной плоскости и на пересечении четырех прямых; а если рассмотреть шесть других конических поверхностей, описанных изнутри, т. е. тех, вершины которых лежат между центрами



Фиг. 22.

двух шаров, то вершины этих шести новых конусов будут лежать по три в одной плоскости с тремя первыми.²⁴

О плоскости, касательной к поверхностям цилиндрической, конической и поверхности вращения, проведенной через точки, заданные вне этих поверхностей

45. Задача четвертая. Через произвольно взятую точку построить плоскость, касательную к заданной цилиндрической поверхности.

Решение. Пусть $EIFK$ (фиг. 23) — след цилиндрической поверхности на горизонтальной плоскости, который мы пред-

тельной плоскости должен быть касательным к кривой $EIFK$; следовательно, если через точку D провести к этой кривой все возможные касательные $DE, DF, \dots$ и т. д., то мы получим горизонтальные следы всех касательных плоскостей, которые могут проходить через заданную точку. Если через точки касания E, F и т. д. провести параллельно AB неопределенные прямые $EG, FH, \dots$ и т. д., то мы получим горизонтальные проекции прямолинейных образующих, вдоль которых различные касательные плоскости касаются цилиндрической поверхности; наконец, мы найдем вертикальные проекции $eg, fh, \dots$ и т. д. этих образующих или этих прямых касания, проектируя точки $E, F, \dots$ и т. д. на вертикальную плоскость в точки $e, f, \dots$ и т. д. и проведя через эти последние точки неопределенные прямые, параллельные ab . Что касается следов касательной плоскости на вертикальной плоскости, то мы найдем их по способу фиг. 12.

46. Задача пятая. Через произвольно взятую точку провести плоскость, касательную к заданной конической поверхности.

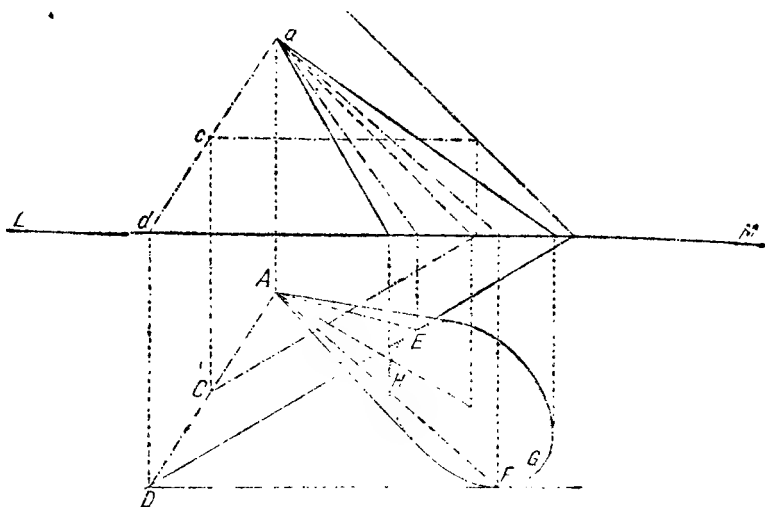
Так как решение этой задачи очень мало отличается от предыдущей, то мы ограничимся указанием построения на фиг. 24, где кривая $EGFH$ есть заданный след конической поверхности, A и a — заданные проекции вершины и C, c — проекции заданной точки, через которые касательная плоскость должна пройти.

47. Задача шестая. Через заданную прямую провести плоскость, касательную к заданной поверхности вращения.

Решение. Предположим, что ось поверхности вращения перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, что не изменит общности решения, потому что мы всегда можем выбирать такое положение этих плоскостей, чтобы это условие было удовлетворено.

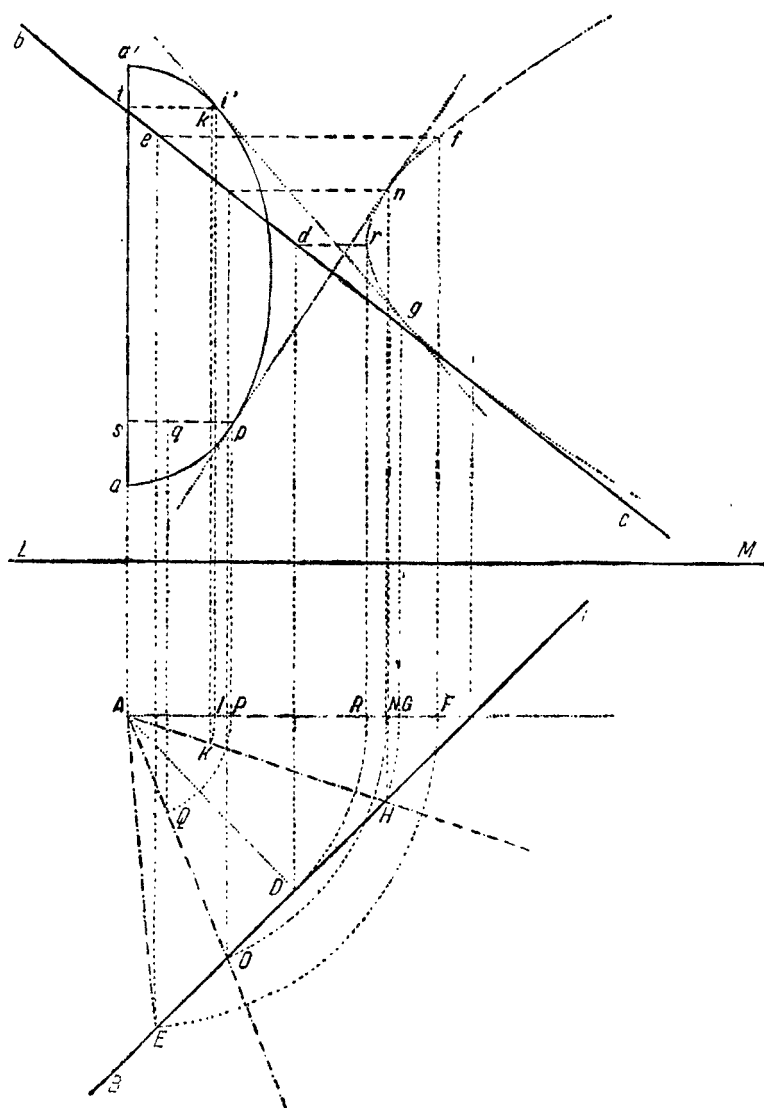
Пусть A (фиг. 25) будет заданная горизонтальная проекция оси поверхности, aa' — ее вертикальная проекция, $apia'$ — обра-

зующая кривая поверхности и BC , bc — заданные проекции прямой, через которую касательная плоскость должна проходить. Пусть из точки A опущен на BC перпендикуляр AD , который будет горизонтальной проекцией кратчайшего расстояния между осью и заданной прямой, и пусть точка D проектируется на bc в d .



Фиг. 24.

Предположим, что касательная плоскость построена; затем предположим, что заданная прямая вращается вокруг оси вращения, не меняя своего расстояния до этой оси и наклона к горизонтальной плоскости, и что она увлекает за собой касательную плоскость таким образом, что последняя не перестает касаться поверхности; очевидно, что при этом движении точка касания поверхности и плоскости будет изменять свое положение; но так как касательная плоскость сохраняет все время тот же наклон, эта точка [касания не будет менять своей высоты на поверхности и будет двигаться по окружности горизонтального круга, центр которого лежит на оси. Кроме того, данная прямая образует своим движением вторую поверх-



Фиг. 25.

ность вращения, вокруг той же оси, к которой касательная плоскость будет сама касательная во всех положениях.

Проведем плоскость через ось и через точку касания касательной плоскости с первой поверхностью; эта плоскость пересечет прямолинейную образующую в точке, которая будет точкой соприкосновения той же касательной плоскости со второй поверхностью, потому что эта касательная плоскость проходит не только через прямолинейную образующую в этой точке, но и через касательную к горизонтальному кругу в той же точке, а так как она проходит также через касательную к горизонтальному кругу в точке касания с первой поверхностью, то по свойству поверхностей вращения эти обе касательные параллельны.

Ввиду того что мы должны решить вопрос при помощи второй поверхности вращения, необходимо построить кривую, по которой она пересекается плоскостью, проведенной через ось; предположим, что эта плоскость параллельна вертикальной плоскости проекций, и, следовательно, проектируется на горизонтальную плоскость по прямой AF , параллельной LM .

Возьмем на заданной прямой произвольную точку с проекциями E, e и будем искать точку, в которой она при своем движении встречает плоскость сечения. Прежде всего, эта точка опишет вокруг оси вращения дугу горизонтального круга, горизонтальную проекцию которого получим, описывая из точки A , как из центра, радиусом AE дугу EF до ее встречи с прямой AF в некоторой точке F ; вертикальную проекцию этой дуги получим, проводя через точку e (неопределенную) горизонталь ef . Следовательно, точка F будет горизонтальной проекцией встречи вращающейся точки с плоскостью сечения; поэтому, если проектировать точку F в f на ef , то точка f будет вертикальной проекцией этой точки встречи и, следовательно, точкой, лежащей в плоскости сечения. Если мы повторим эти операции для любого числа других точек, взятых на заданной прямой, мы получим столько же точек g, f, r, n , через которые пройдет искомая кривая.

Далее, предположим, что заданная прямая и касательная плоскость приняли, благодаря их одновременному вращению вокруг оси, такое положение, что касательная плоскость перпендикулярна вертикальной плоскости проекций. В этом положении проекция на эту плоскость будет прямой линией, и эта прямая будет одновременно касательная к двум кривым $apia'$, $gfrn$. Если, следовательно, провести к этим двум кривым все общие касательные как gi , pr , то мы получим проекции всех касательных плоскостей, удовлетворяющих условию и рассмотренных в положении, занятом ими, когда, в силу вращения, они последовательно становились перпендикулярными к вертикальной плоскости. Точки касания i , p этих касательных с образующей первой поверхности определяют высоты точек касания поверхности со всеми касательными плоскостями. Поэтому, если через эти точки провести (неопределенные) горизонталы it , ps , — они будут заключать вертикальные проекции точек касания поверхности с плоскостями; и если из точки A , как из центра, радиусами, равными соответственно it и ps описать дуги круга IK , PQ , то они будут заключать горизонтальные проекции тех же точек. Таким образом, для их окончательного определения остается только установить, на каких меридианах поверхности вращения они должны находиться: для этого служат точки касания g , n .

Спроектируем точки g , n на AG в точки G и N и из точки A , как из центра, радиусами, равными последовательно AG и AN , опишем круговые дуги GH , NO до пересечения с прямой BC в точках H и O ; эти дуги будут мерой угла поворота, который совершила для каждой касательной плоскости прямая, проходящая через ее точки касания с обеими поверхностями, чтобы стать в вертикальной плоскости, параллельной плоскости проекций. Горизонтальные проекции тех же прямых, рассмотренных в их естественном положении, мы получим, проведя через точку A прямые AH , AO ; наконец, точки K , Q , в которых последние прямые пересекут соответствующие дуги IK , PQ , будут горизонтальными проекциями точек

касания первой поверхности с касательными плоскостями, проведенными через заданную прямую. Что касается вертикальных проекций тех же точек, то мы найдем их, проектируя точки K, Q в k, q на соответственные горизонтали it, ps .

После того как определены горизонтальные и вертикальные проекции точек касания, мы построим следы всех касательных плоскостей способами, которыми мы уже пользовались.

Этот метод легко может быть обобщен для применения к поверхностям, образованным любыми кривыми, постоянными по форме и меняющими свое положение в пространстве.²⁵

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

*О пересечении кривых поверхностей. Определение кривых
двойкой кривизны*

48. Если две кривые поверхности заданы таким образом, что образование их известно, и последовательность всех точек пространства, через которые они проходят, не заключает больше ничего произвольного, если для каждой из этих точек можно, при одной произвольно взятой проекции, всегда построить вторую, и если при этом обе поверхности имеют несколько общих точек в пространстве, то положение всех их общих точек вполне определено; оно зависит от формы обеих кривых поверхностей и их взаимного положения и является необходимым следствием самого способа образования поверхностей.

Последовательность всех точек, общих обеим заданным кривым поверхностям, образует в пространстве, вообще говоря, кривую линию; в некоторых частных случаях эта кривая может лежать в одной плоскости и иметь одну кривизну; в значительно более редких случаях она может оказаться прямой, не имеющей никакой кривизны; и, наконец, в случаях еще более редких может свестись к одной единственной точке; но в общем случае эта кривая представляет собой так называемую *кривую двойкой кривизны*, так как она имеет кривизну обеих поверхностей, на каждой из которых она одно-

временно находится и общей линией пересечением которых она является.²⁶

Соответствие между операциями в начертательной геометрии и исключением неизвестных в алгебре

49. Между операциями, выполняемыми в анализе, и методами начертательной геометрии существует соответствие, о котором желательно здесь дать представление.

Если алгебраическая задача выражена в форме уравнений, число которых равно числу неизвестных, то всегда можно преобразовать эту систему в такую, в которой, при том же числе уравнений, в каждое из них входило бы только одно неизвестное; это приводит к определению значения каждого из неизвестных. Операция, приводящая к этой цели, называемая *исключением неизвестных*, состоит в последовательном исключении одного из неизвестных при помощи одного уравнения из всех других; исключая, таким образом, последовательно различные неизвестные, приходят к окончательному уравнению, содержащему только одно неизвестное, величина которого и определяется.

Процесс исключения неизвестных в алгебре вполне аналогичен тем операциям, при помощи которых в начертательной геометрии находятся линии пересечения кривых поверхностей.

Действительно, предположим, что мы имеем точку в пространстве; обозначая через x , y , z расстояния ее до трех взаимно перпендикулярных плоскостей, мы устанавливаем некоторое соотношение между этими тремя расстояниями, выражаемое уравнением, в которое входят три неизвестные x , y , z и постоянные величины. Это соотношение еще не определяет положения точки, ибо величины x , y , z могут изменять свои значения, а следовательно, точка будет менять свое положение в пространстве, не нарушая соотношения, выраженного уравнением; это уравнение будет уравнением кривой поверхности, проходящей через все возможные положения точки,

при которых заданное соотношение между координатами не меняется.

Предположим, например, что центр шара радиуса A расположен в точке пересечения трех взаимно перпендикулярных плоскостей; опустим из некоторой точки его поверхности перпендикуляры на все три плоскости и обозначим их буквами x, y, z ; очевидно, что радиус шара, проведенный к рассматриваемой точке, будет диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребрами x, y, z , что его квадрат будет равен сумме квадратов трех ребер, и, таким образом, мы будем иметь уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$. Если предположить, что точка меняет свое положение на поверхности шара, то и расстояния ее x, y, z до перпендикулярных плоскостей изменятся, но расстояние до центра не изменится, и сумма квадратов трех ее координат, всегда равная квадрату радиуса, будет сохранять то же значение; между координатами этой точки будет продолжать существовать соотношение, выраженное уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = A^2$. Это уравнение, справедливое для всех точек поверхности шара, — и только для них — представляет собою уравнение его поверхности. Каждая кривая поверхность выражается своим уравнением; и если не всегда легко выразить это уравнение в таких простых величинах, как расстояния x, y, z , то всегда можно это сделать, пользуясь более сложными выражениями, как, например, наклонами касательных поверхностей или радиусами кривизны; для нашей цели достаточно одного приведенного примера.

Пусть мы имеем уравнения двух различных кривых поверхностей, выраженные через x, y, z , т. е. через расстояния до тех же перпендикулярных плоскостей; исключим одну из трех величин x, y, z , например z из двух уравнений; совместность этих уравнений прежде всего устанавливает, что мы здесь имеем дело не со всеми точками первой поверхности, а также и не со всеми точками второй, но только с точками их пересечения, для каждой из которых оба уравнения должны иметь силу, потому что эти точки лежат одновременно на обеих

поверхностях. Далее уравнение, выраженное через x и y , после исключения z дает соотношение, существующее между этими двумя расстояниями для всех точек пересечения, каково бы ни было значение исключенного расстояния z , больше не играющего роли в уравнении; следовательно, оно будет уравнением проекции линии пересечения двух поверхностей на плоскость, перпендикулярную z .

Мы видим, таким образом, что в алгебре исключение неизвестного из нескольких уравнений с тремя неизвестными имеет целью определение на трех плоскостях, к которым отнесено все пространство, проекций линий пересечения поверхностей, характеризующихся уравнениями.

50. Соответствие между операциями в анализе и методами начертательной геометрии не ограничивается только что сказанным: оно существует повсюду. Если точки, кривые линии или поверхности заставить двигаться в пространстве, то всегда эти движения могут быть продиктованы аналитическими операциями, — и новые объекты, которые при этом образуются, выражают результаты этих операций. Обратно, нет ни одной трехмерной операции в анализе, которая не была бы записью движения, произведенного в пространстве и ею продиктованной. Для наиболее эффективного изучения математики ученик должен как можно раньше привыкнуть чувствовать соответствие между операциями анализа и геометрии; с одной стороны, он должен уметь записывать аналитически все те движения в пространстве, которые он может себе представить, с другой же стороны, — представлять себе постоянно в пространстве движущуюся картину, записью которой является каждая из аналитических операций.²⁷

Общий способ определения проекций линий пересечения поверхностей. Видоизменения этого способа для некоторых частных случаев

51. Вернемся к нашему предмету — способу определения проекций линий пересечения кривых поверхностей.

Чтобы внести большую ясность в изложение этого способа, мы не сразу будем излагать его со всем присущим ему изяществом, а подойдем к этому постепенно. Более того, изложение будет общим и применимым к любым двум поверхностям, и хотя буквенные обозначения, которыми мы будем пользоваться, относятся к фиг. 26, представляющей частный случай двух конических поверхностей с круговыми основаниями и вертикальными осями, тем не менее следует всегда помнить, что каждая из поверхностей, о которых идет речь, может быть в каждом частном случае отлична от конической.

52. Первая общая задача. Пусть известен способ образования двух кривых поверхностей, и все элементы, определяющие это образование, заданы своими проекциями; построить проекции кривой двоякой кривизны, по которой пересекаются обе поверхности.

Решение. Рассмотрим ряд неопределенных²⁸ плоскостей, расположенных определенным образом в пространстве; например, эти плоскости могут быть все горизонтальными; с такого предположения мы и начнем рассмотрение. В этом случае вертикальная проекция каждой из них будет неопределенная горизонтальная прямая; поскольку мы можем проводить их на каком угодно расстоянии, мы предположим, что в вертикальной плоскости проведено любое количество горизонтальных прямых ee' , ee' , ee' и т. д. (фиг. 26) и что последовательность этих прямых представляет собой вертикальную проекцию последовательности построенных плоскостей.

Произведем последовательно для каждой из этих плоскостей по отношению к ее проекции ee' такую операцию, которую мы теперь выполним для плоскости, проектируемой в EE' .

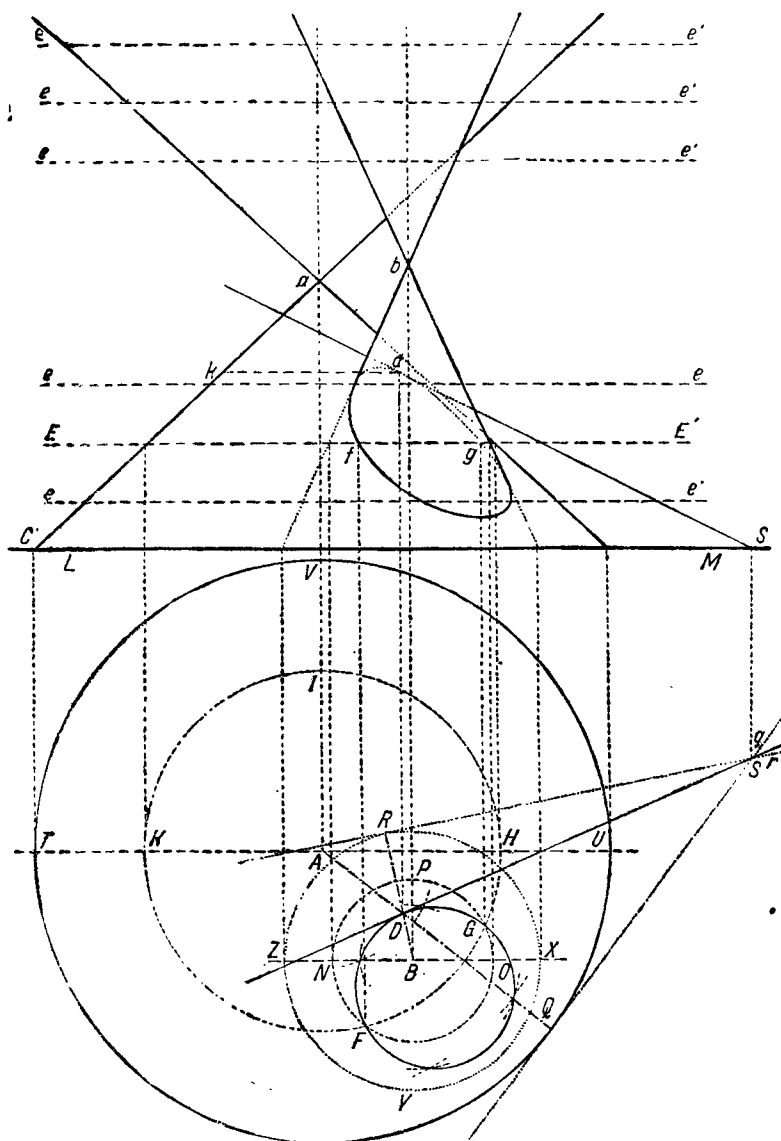
Плоскость EE' пересечет первую поверхность по определенной кривой, которую всегда можно построить, если известен способ образования поверхности, ибо эта кривая есть последовательная совокупность точек, в которых пло-

скость EE' пересекается образующей во всех ее положениях. Так как эта кривая плоская и горизонтальная, ее горизонтальная проекция будет одинакова с ней, равна ей и расположена таким же образом; следовательно, мы можем построить эту проекцию; предположим, что это будет кривая $FGHIK$.

Та же плоскость EE' пересечет и вторую поверхность по другой плоской горизонтальной кривой, горизонтальную проекцию которой мы всегда сможем построить; предположим, что этой проекцией будет кривая $FOGPN$.

При этом возможны два случая: кривые, по которым плоскость EE' пересекает обе поверхности, могут пересекаться между собой, или же не пересекаться; если они не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали, это будет доказательством, что на высоте плоскости EE' обе поверхности не имеют ни одной общей точки; но если эти две кривые пересекаются, они пересекутся в некотором числе точек, которые будут общими обеим поверхностям и будут, следовательно, представлять собой столько же точек искомой линии пересечения. Действительно, поскольку точки пересечения двух кривых находятся на первой из них, они принадлежат к первой из заданных поверхностей; поскольку же они принадлежат второй кривой, они также находятся на второй поверхности; следовательно, поскольку они одновременно находятся на двух кривых, они также принадлежат и двум поверхностям.

Но горизонтальные проекции точек, в которых пересекаются обе кривые, должны находиться как на проекции первой, так и на проекции второй кривой; следовательно, точки $F, G, \dots$ пересечения двух кривых $FGHIK$ и $FGOPN$ будут горизонтальными проекциями такого же числа точек искомой линии пересечения двух кривых поверхностей. Для того чтобы получить вертикальные проекции тех же точек, надо учесть, что все они находятся в горизонтальной плоскости EE' , и их проекции должны лежать на прямой EE' . Следовательно,



Фиг. 26.

проектируя точки $F, G, \dots$ на прямую EE' в точки $f, g, \dots$, мы получим их вертикальные проекции.

Если для всех других горизонталей $ee', ee' \dots$ выполнить ту же операцию, которую мы только что совершили для EE' , мы найдем для каждой из них в горизонтальной проекции последовательность новых точек $F, G \dots$ и в вертикальной проекции последовательность новых точек $f, g, \dots$ и т. д. Затем, если через все точки $F \dots$ провести одну ветвь кривой, а через все точки G — другую ветвь и так далее, то совокупность всех этих ветвей, которые могут иногда входить одна в другую, будет горизонтальной проекцией линии пересечения двух поверхностей; если провести подобным же образом ветвь кривой через все точки $f \dots$ и через все точки $g \dots$ другую ветвь и т. д., то совокупность всех этих ветвей, которые могут в некоторых случаях входить одна в другую, будет вертикальной проекцией искомой линии пересечения.

53. Только что изложенный нами способ является общим даже в том случае, если мы выбрали в качестве системы вспомогательных плоскостей совокупность горизонтальных плоскостей. Мы увидим, что в некоторых случаях выбор системы вспомогательных плоскостей не безразличен и что можно иногда найти такую, которая приводит к более легким и изящным построениям; иногда даже вместо системы плоскостей предпочтительно пользоваться совокупностью кривых поверхностей, отличающихся друг от друга в одном из их измерений. Для того чтобы построить линию пересечения двух поверхностей вращения с вертикальными осями, наиболее выгодно будет воспользоваться системой горизонтальных плоскостей, потому что каждая из этих плоскостей пересекает обе поверхности по окружностям кругов, у которых центры лежат на соответственных осях, а радиусы равны расстояниям от оси до образующих кривых, взятых на высоте пересекающей плоскости, горизонтальные же проекции суть круги, заданные по положению и размерам.

В этом случае все точки горизонтальной проекции линии пересечения двух поверхностей находятся на пересечениях круговых дуг. Разумеется, что если бы оси поверхностей вращения были параллельны между собой, но не вертикальны, то надо было бы изменить плоскости проекций и выбрать их таким образом, чтобы одна из них была перпендикулярна осям.

54. Если бы речь шла о построении линии пересечения двух конических поверхностей с любыми основаниями и заданными или построенными следами в горизонтальной плоскости, то применение горизонтальных плоскостей привело бы к слишком долгим операциям; каждая из горизонтальных плоскостей пересекала бы обе поверхности по кривым, подобным следам соответственных поверхностей; однако они не были бы идентичны этим следам и их пришлось бы строить по точкам, каждую кривую в отдельности; если же построить систему плоскостей, проходящих через прямую, соединяющую вершины обеих конусов, то каждая из этих плоскостей пересечет обе конические поверхности по четырем прямым, а эти прямые, лежащие в одной плоскости, пересекутся между собою, не считая вершин, в четырех точках, которые и будут принадлежать пересечению обеих поверхностей. В этом случае каждая из точек горизонтальной проекции линии пересечения поверхностей будет построена как точка пересечения двух прямых.

55. Для двух цилиндрических поверхностей с любыми основаниями и с разными наклонами образующих, система горизонтальных плоскостей также не была бы наиболее подходящей. Правда, каждая из этих плоскостей пересекала бы обе поверхности по кривым, одинаковым по виду и равным их соответственным следам, но эти кривые не оказались бы на одной вертикали со следами, а имели бы своими проекциями кривые, не совпадающие с самими следами, которые пришлось бы строить по точкам. Если выбрать систему плоскостей, параллельных одновременно образующим обеих поверхностей,

то каждая из этих плоскостей пересечет обе поверхности по прямым, которые пересекутся между собою в точках, принадлежащих линии пересечения обеих поверхностей.

Таким образом, точки горизонтальной проекции будут построены как пересечения прямых линий. Впрочем это только необходимое следствие из того, что мы сказали о случае двух конических поверхностей.

56. Наконец, для двух поверхностей вращения, оси которых лежат в одной плоскости, но все параллельны друг другу, опять-таки наиболее подходящей будет не система плоскостей, а система сферических поверхностей, общий центр которых лежит в точке пересечения обеих осей; каждая из сферических поверхностей пересечет обе поверхности вращения по окружностям двух кругов с центрами на соответствующих осях и лежащих в плоскостях, перпендикулярных плоскости проходящей через обе оси; точки пересечения этих двух окружностей, лежащие одновременно и на сферической поверхности и на обеих поверхностях вращения, будут принадлежать искомой линии пересечения. Таким образом, точки, принадлежащие проекции линии пересечения, будут построены как точки пересечения кругов с прямыми. В этом случае наиболее выгодным положением плоскостей проекций будет такое, при котором одна перпендикулярна к одной из осей, а другая параллельна им обеим.²⁹

Этих немногочисленных замечаний относительно наиболее часто встречающихся кривых поверхностей достаточно, чтобы показать прием, как надо пользоваться общим методом и как, зная образование кривых поверхностей, можно выбрать род сечения, приводящий к самым легким построениям.

Касательные к линиям пересечения поверхностей

57. Когда две кривые поверхности заданы по форме и положению, то этим самым не только кривая их пересечения определена в пространстве, но также и все свойства этих

кривых будут известны. Так, например, в каждой из их точек известно направление касательных так же, как и нормальной плоскости, т. е. плоскости, пересекающей кривую под прямым углом и, следовательно, перпендикулярной к касательной в точке пересечения. Хотя в дальнейшем нам предстоит часто иметь дело с плоскостями, нормальными к кривым двоякой кривизны, однако мы не будем давать здесь никаких деталей относительно их определения, так как поскольку эти плоскости всегда перпендикулярны к касательным, нам будет достаточно указать способ построения проекций касательных к линиям пересечения кривых поверхностей.

58. Вторая общая задача. Через произвольно взятую точку на линии пересечения двух кривых поверхностей провести касательную к этой линии пересечения.

Решение. Произвольная точка, взятая на линии пересечения двух кривых поверхностей, находится одновременно и на той, и на другой поверхностях. Если через эту точку, рассматриваемую на первой поверхности, провести касательную плоскость, то она коснется линии пересечения в данной точке. Подобным же образом, если через эту же точку, рассматриваемую на второй поверхности, провести касательную плоскость, то она коснется линии пересечения в рассматриваемой точке. Следовательно, обе касательные плоскости коснутся линии пересечения в одной и той же точке, которая будет в то же время одной из общих точек и, поэтому, одной из точек прямой их пересечения; итак, пересечение двух касательных плоскостей и будет искомой касательной.

Эта задача приводит к следующему положению, широко применяемому в начертательной геометрии.

„Проекция касательной к кривой двоякой кривизны есть сама касательная к проекции кривой, и ее точка касания есть проекция точки касания на кривой двоякой кривизны“.

Действительно, если из всех точек кривой двоякой кривизны опустить перпендикуляры на одну из плоскостей проек-

ций, например, на горизонтальную плоскость, то все эти перпендикуляры будут лежать на вертикальной цилиндрической поверхности, пересекающейся горизонтальной плоскостью по самой проекции кривой. Подобным же образом, если через все точки касательной к кривой двойкой кривизны провести вертикали, они будут лежать в вертикальной плоскости, пересекаемой горизонтальной плоскостью по проекции самой касательной. Но цилиндрическая поверхность и вертикальная плоскость касаются, очевидно, по всей длине вертикали, опущенной из точки касания, которая будет для них общей; следовательно, сечения цилиндрической поверхности и плоскости горизонтальной плоскостью коснутся друг друга в точке, которая будет пересечением линии контакта цилиндрической поверхности с вертикальной плоскостью. Итак, проекции кривой двойкой кривизны и одной из ее касательных касаются друг друга в точке, которая будет проекцией точки касания на кривой.

Пересечения поверхностей цилиндрической, конической и т. д. Развертки этих пересечений в тех случаях, когда одна из поверхностей, к которым они принадлежат, развертываемая

59. Применим все изложенное выше к некоторым частным случаям: для простоты предположим сначала, что одна из поверхностей, пересечение которых мы ищем, будет плоскостью.

Задача первая. Построить сечение заданной цилиндрической поверхности плоскостью, положение которой тоже дано.

Поскольку положение плоскостей проекций может быть взято произвольным, мы предположим сначала (что всегда возможно), что эти плоскости выбраны таким образом, что одна из них будет перпендикулярна образующей поверхности, а другая перпендикулярна пересекающей плоскости, так как в этом положении построение значительно упрощается; далее для упражнения учеников в проектировании, предположим, что обе плоскости проекций расположены как угодно.

Решение. Первый случай, в котором предполагается что образующая поверхности должна быть перпендикулярной к одной из плоскостей проекций, например к горизонтальной плоскости, и что пересекающая плоскость должна быть перпендикулярной к другой.

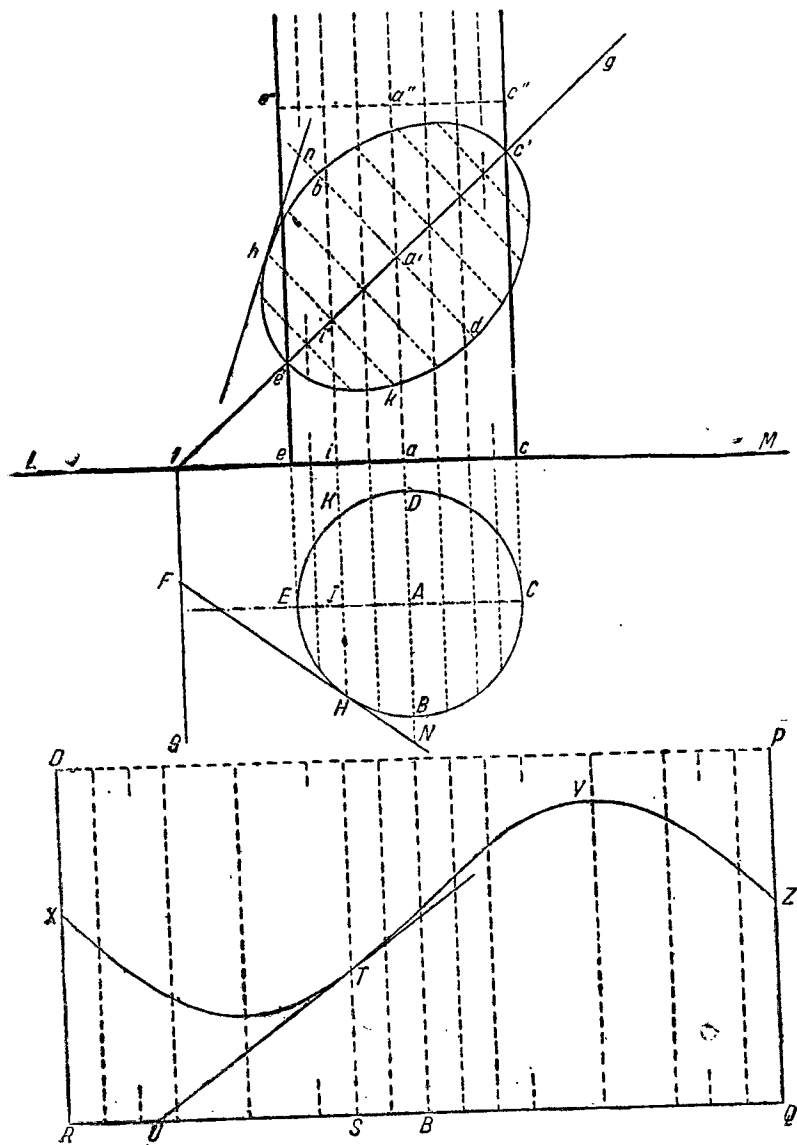
Пусть A (фиг. 27) горизонтальная проекция прямой, которой должна быть всегда параллельна образующая цилиндрической поверхности; aa'' ее вертикальная проекция; $BCDE$ — заданный след цилиндрической поверхности, который будет горизонтальной проекцией неопределенной поверхности и, следовательно, проекцией кривой пересечения; пусть fg будет заданная вертикальная проекция пересекающей плоскости, которая будет также и проекцией искомого сечения, а $F'G$ — горизонтальный след той же плоскости; очевидно, что если провести к кривой $BCDE$ перпендикулярно LM неопределенные касательные Ee'' , Cc'' , то прямые ee'' , cc'' будут вертикальными проекциями образующей в ее предельных положениях, и что точки e' , c' , в которых они встречают проекцию fg секущей плоскости, будут на fg пределами вертикальной проекции искомой линии пересечения.

Если через некоторую точку, произвольно взятую на линии пересечения (за горизонтальную проекцию этой точки примем точку H , произвольно взятую на кривой $BCDE$; ее вертикальную проекцию получим, проектируя H на fg в точку i), нужно провести касательную к этой линии пересечения, то очевидно, что эта касательная будет лежать в пересекающей плоскости, и ее вертикальной проекцией будет fg ; очевидно также, что она будет лежать в вертикальной плоскости, касательной к цилиндрической поверхности, и что ее горизонтальной проекцией, которая будет одновременно проекцией касательной плоскости, будет прямая FHN , касательная в точке H к заданной кривой $BCDE$. Таким образом, все определено в отношении искомой линии пересечения.

60. Предположим, что надо построить эту линию пересечения такой, какой она должна быть в своей плоскости, и через

одну из произвольно взятых точек провести к ней касательную. Если плоскость вертикальных проекций находится слишком далеко от кривой $BCDE$, можно провести другую вертикальную плоскость, ей параллельную, проходящую внутри кривой $BCDE$, горизонтальной проекцией которой будет прямая EC , параллельная LM . Эта вертикальная плоскость пересечет секущую плоскость по прямой, параллельной ее проекции fg , вокруг которой, как на шарнире, должна по нашему предположению повернуться секущая плоскость, чтобы стать вертикальной и представить искомую кривую и ее плоскости.

Проведем затем через любое число точек H , взятых произвольно на $BCDE$, вертикальные плоскости, перпендикулярные к вертикальной плоскости проекций, и построим их горизонтальные и вертикальные проекции, проведя через точки H прямые $HIKii'$, перпендикулярные к LM . Каждая из этих плоскостей пересечет заданную секущую плоскость по горизонтальной прямой, перпендикулярной к оси шарнира, вертикальной проекцией которой будет i' — точка пересечения двух прямых fg и ii' . Кроме того, в каждой плоскости эта горизонтальная прямая встретит шарнир в точке, горизонтальной проекцией которой будет I , точка пересечения прямых EC и $HIKii'$; она встретит искомую кривую в точках, горизонтальными проекциями которых будут пересечения H, K прямой $HIKii'$ с кривой $BCDE$. Наконец, эта прямая и все ее отрезки будут равны своим горизонтальным проекциям. Но когда заданная секущая плоскость вращается вокруг шарнира, чтобы стать вертикальной, то все эти прямые, бывшие сначала горизонтальными, все время остаются перпендикулярными к шарниру и не меняют своей величины. Следовательно, если через все точки i' провести к fg неопределенные перпендикуляры hk , и если на этих перпендикулярах отложить отрезки $i'h$ и $i'k$, равные соответственно IH и IK , мы получим сколько угодно точек h, k , через которые должна проходить искомая кривая $e'kc'h$.



Фиг. 27

61. После того как кривая построена в своей плоскости, остается провести к ней касательную через произвольно взятую точку h ; вертикальную проекцию этой точки найдем, опуская из h на fg перпендикуляр hi' ; горизонтальную проекцию этой точки получим, проектируя i' в H на кривой $BCDE$; горизонтальную проекцию искомой касательной найдем, проводя прямую FN , касательную в H к кривой $BCDE$; далее, достаточно будет перенести на плоскость кривой какую-нибудь точку касательной, например ту, которая проектируется в произвольно взятую точку N и вертикальная проекция которой на fg будет a' .

Прилагая к этой точке такие же рассуждения, как и для всякой другой точки заданной плоскости, убедимся в том, что если через точку a' провести $a'n$ перпендикулярно fg и отложить на этой прямой отрезок $a'n$, равный расстоянию NA от точки N до прямой EC , то точка n и будет второй точкой касательной.

Таким образом, прямая hn будет искомой касательной.³⁰

62. Какова бы ни была заданная кривая $BCDE$, мы видим, что линия пересечения $e'kc'h$ обладает тем свойством, что в любой ее точке подкасательная $a'n$ равна подкасательной AN кривой $BCDE$. Это свойство, хорошо известное для круга и эллипса, когда обе кривые имеют общую ось, имеет место, потому что обе эти кривые являются сечениями одной и той же цилиндрической поверхности двумя различными поверхностями.

63. Наконец, может случиться, что надо нанести на развертке цилиндрической поверхности кривую ее сечения плоскостью. Для этого, развернув кривую $BCDE$ со всеми ее делениями в прямую RQ и проведя через все деления на прямой RQ неопределенные перпендикуляры, мы получим на развертке поверхности следы различных положений прямолинейной образующей, и останется лишь отложить на этих перпендикулярах отрезки соответствующих образующих, заключенные

между перпендикулярным сечением $BCDE$ и сечением, произведенным данной секущей плоскостью. Но эти отрезки образующих равны их вертикальным проекциям, которые все заключены между прямыми LM и fg . Поэтому, если, например, точка H падает в точку S на прямой RQ , то, нанося на перпендикуляре, проходящем через точку S , отрезок ST , равный ii' , найдем, что точка T будет той, на развернутой поверхности, где образующая, проходящая через точку H , встречает данную секущую плоскость. Кривая $XTYZ$, проходящая через все точки, построенные таким образом, будет искомой кривой.³¹

64. Очевидно, что если продолжить касательную в точке H до встречи с горизонтальным следом GF данной плоскости в некоторой точке F и отложить на RQ отрезок SU , равный HF , то прямая TU и будет касательной к кривой, ибо при развертывании цилиндрической поверхности элементы не меняют своего наклона относительно горизонтальной плоскости.

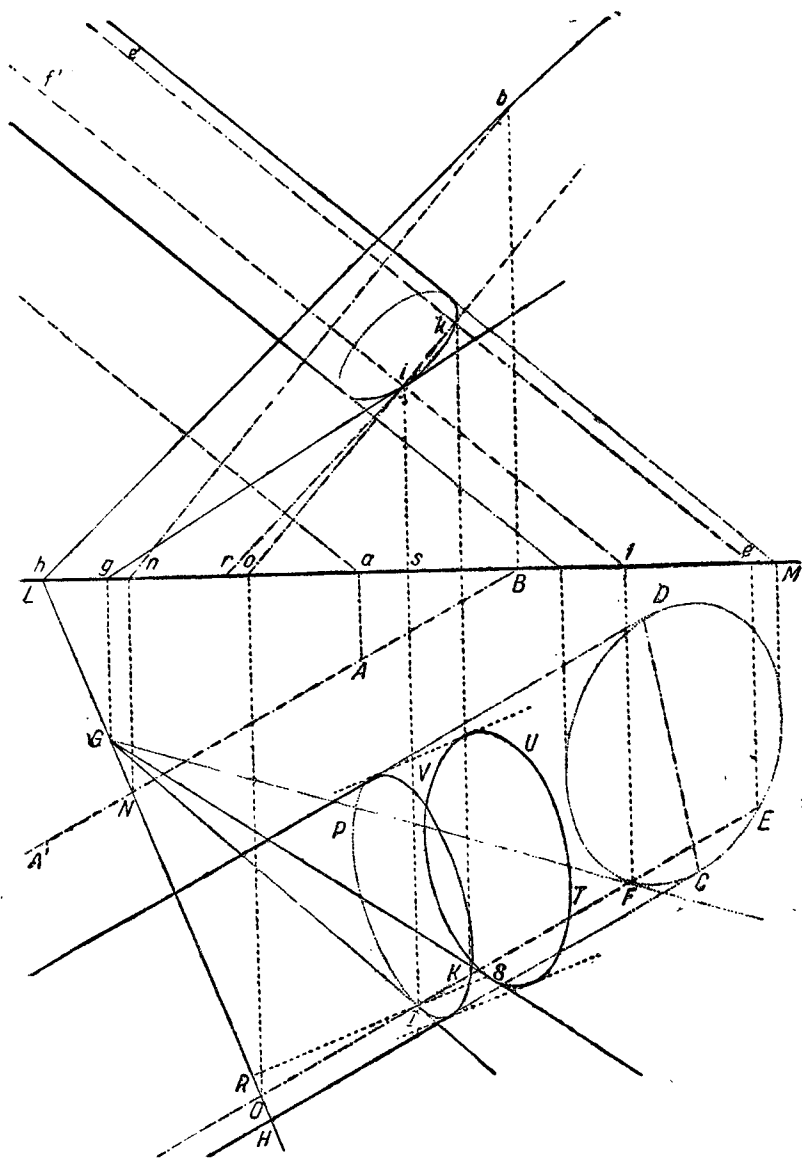
65. Решение. Второй случай, в котором предполагается, что цилиндрическая поверхность и секущая плоскость расположены как угодно относительно плоскостей проекций (фиг. 28). Пусть AA' и aa' обе проекции прямой, которой должна быть параллельна образующая; $CEDF$ — заданный след цилиндрической поверхности, и HGh , hb — следы секущей плоскости.

Представим себе ряд плоскостей, параллельных образующей цилиндрической поверхности, которые будут, кроме того, перпендикулярны к одной из плоскостей проекций, например к горизонтальной; каждая из этих плоскостей будет проектироваться по прямой OKE , параллельной AA' , и пересечет поверхность по прямой, которые будут представлять собою образующие, и встретят горизонтальную плоскость в точках пересечения E , F прямой OKE с кривой $CEDF$. Если, следовательно, мы спроектируем точки E и F в e и f на прямой LM , и если через эти последние точки проведем прямые ee' , ff' , парал-

лельные aa' , то мы получим вертикальные проекции сечений поверхности каждой из плоскостей, параллельных образующей.

Те же плоскости пересекут и заданную секущую плоскость по параллельным между собою прямым, горизонтальные следы которых расположатся в различные точки O прямой HG и вертикальные проекции которых будут также параллельны между собой. Чтобы построить эти проекции, надо сначала найти направление одной из них, например той, которая соответствует вертикальной плоскости, проходящей через AA' . Для этого, если продолжить AA' до пересечения с одной стороны со следом заданной секущей плоскости в точке N , и с другой стороны — с прямой LM в точке B , и если спроектировать точку B в b на hb , то обе точки N и b будут следами на двух плоскостях проекций пересечения заданной плоскости с вертикальной. Если, далее, спроектировать точку N в n на LM и провести прямую nb , то мы получим вертикальную проекцию этого пересечения. Следовательно, проектируя на LM все точки O , в которых след GH пересекается проекциями вертикальных плоскостей, что даст ряд точек o , и проведя через эти последние прямые oik , параллельные nb , мы получим вертикальные проекции сечений данной плоскости рядом вертикальных плоскостей. Наконец, точки встречи i, k каждой прямой oik с проекциями ee', ff' сечений цилиндрической поверхности соответствующей вертикальной плоскостью будут лежать на вертикальной проекции искомого сечения, и кривая, которая пройдет через все точки i, k , таким образом определенные, будет этой проекцией. Если спроектировать точки i и k в I, K на проекцию OKE соответствующей вертикальной плоскости, то мы получим горизонтальные проекции тех же точек, и кривая KIP , которая пройдет через все, таким образом определенные точки, будет горизонтальной проекцией сечения.³²

66. Чтобы получить касательные этих двух проекций в точках I, i , надо вспомнить, что эти касательные являются



Фиг. 28.

проекциями касательной к линии сечения. Но, поскольку эта последняя касательная лежит одновременно и в данной плоскости касательной к цилиндрической поверхности, ее горизонтальный след должен совпадать с пересечением горизонтальных следов этих двух плоскостей; более того, след касательной плоскости есть касательная в точке F к кривой $CEDF$. Поэтому, если, построив эту касательную и продолжив ее до пересечения со следом данной плоскости в точке G , провести прямую GI , то эта прямая коснется в точке I горизонтальной проекции линии сечения. Наконец, проектируя точку G на LM в точку g и проводя прямую gi , получим касательную в точке i к вертикальной проекции той же кривой.³³

67. Чтобы построить кривую пересечения в ее плоскости, представим себе, что заданная плоскость вращается вокруг своего горизонтального следа HG , как шарнира, чтобы совместиться с горизонтальной плоскостью. При этом движении каждая из точек линии сечения, например та, которая проектируется в I , опишет дугу круга в вертикальной плоскости, перпендикулярной к HG , неопределенную проекцию которого получим, проведя через точку I прямую RIS перпендикулярно HG . Следовательно, когда плоскость будет повернута, точка на линии сечения упадет в некоторую точку этой прямой. Остается найти расстояние от этой точки до шарнира: горизонтальная проекция этого расстояния есть IR , и разность высот ее концов представлена вертикалью is . Если отложить на LM отрезок sr , равный IR , то гипотенуза ri и будет этим расстоянием. Следовательно, откладывая ri на RI от R к S , получим точку S , которая будет одной из точек линии сечения, рассмотренной в ее плоскости, совмещенной с горизонтальной плоскостью; и кривая $STUV$, проведенная через все точки S , построенные таким же образом, будет этой линией сечения.

68. Чтобы получить касательную к этой кривой в точке S , достаточно вспомнить, что во время движения вспомога-

ной плоскости касательная всегда проходит через точку G на шарнире; следовательно, проводя прямую SG , мы получим искомую касательную.

69. Задача вторая. Построить сечение конической поверхности с любым данным основанием заданной по положению плоскостью.

Решение. Предположим, что всегда возможно, что вертикальная плоскость проекций перпендикулярна секущей плоскости.

Пусть A и a' (фиг. 29) проекции вершины конуса или центра конической поверхности, $BCDE$ — след этой поверхности в горизонтальной плоскости, fg — вертикальная проекция секущей плоскости и Gf — ее горизонтальный след. Вообразим ряд плоскостей, проходящих через вершину конуса и перпендикулярных к вертикальной плоскости проекций; вертикальными проекциями этих плоскостей будут прямые $a's$, проходящие через проекцию вершины; горизонтальными следами будут прямые sC , перпендикулярные к LM , которые пересекут след конической поверхности в некоторых точках $C, C', \dots$ Эти плоскости пересекут поверхность по прямым, вертикальными проекциями которых будут прямые $a's \dots$, а горизонтальные проекции получим, проводя через точку A прямые $CA, C'A, \dots$ Эти плоскости пересекут также заданную плоскость по прямым, перпендикулярным к вертикальной плоскости. Проекциями этих прямых будут точки $h \dots$ пересечения fg с прямыми $a's \dots$, и их горизонтальные проекции получим, опуская из точек $h \dots$ неопределенные перпендикуляры hN на LM . Прямые hN пересекут соответствующие прямые $CA, C'A, \dots$ в точках $H, H' \dots$, которые будут горизонтальными проекциями такого же числа точек искомой линии сечения; и кривая $RHQH'$, проходящая через все построенные точки, будет проекцией линии сечения.

70. Чтобы провести к этой кривой касательную в произвольно взятой на ней точке H , достаточно найти на горизон-

тальной плоскости след касательной к линии сечения в точке, соответствующей точке H . Но этот след должен лежать на проекции, заданной плоскости и, следовательно, на Gf ; он должен также лежать на проекции плоскости, касающейся конической поверхности по прямой с проекцией $АН$; далее, если продолжим $АН$ до встречи с кривой $BCDE$ в некоторой точке C , касательная CF к этой кривой в точке C будет горизонтальным следом касательной плоскости. Следовательно, точка F пересечения двух следов fG , CF будет лежать на касательной в точке H к кривой $PHQH'$.

71. Если надо построить рассматриваемую линию сечения в ее плоскости, то можно предполагать или что данная плоскость вращается вокруг Gf , как шарнира, до совмещения с горизонтальной плоскостью и построить кривую в положении, которое она тогда займет, или, что данная плоскость вращается вокруг своей вертикальной проекции fg до совмещения с вертикальной плоскостью; это последнее предположение мы и рассмотрим

Все горизонтали, по которым ряд плоскостей, проведенных через вершину, пересекает заданную плоскость, и которые перпендикулярны к fg , при движении этой плоскости сохраняют свою величину и остаются перпендикулярными к fg ; следовательно, если через все точки h провести к fg неопределенные перпендикуляры и если отложить на них отрезки hN , hN' , равные соответственным горизонталям KH , KH' , то точки N и N' будут точками линии сечения; и кривая $RNSN'$, проведенная через все таким образом построенные точки, представит линию сечения в ее собственной плоскости.³¹

72. Из всего предыдущего очевидно, что для построения касательной к этой кривой в произвольной точке N надо из этой точки N опустить на fg перпендикуляр Nh , провести прямую $a'h$ до пересечения с LM в некоторой точке c , спроектировать эту последнюю точку в C на кривую $BCDE$,

провести к этой кривой касательную в точке C , которая пересечет след Gf в некоторой точке F , и отложить перпендикулярно к fg отрезок fO , равный Ff . Прямая ON будет искомой касательной.

Что касается способа построения развертки конической поверхности с любым основанием и нанесения на ней линии сечения данной плоскостью, то мы изложим его позднее, после того как рассмотрим вопрос о сечении конической поверхности поверхностью шара с центром, совпадающим с ее вершиной.

73. Задача третья. Построить линию пересечения двух конических поверхностей с круговыми основаниями, оси которых параллельны.

Решение. Мы не будем повторять здесь всех рассуждений относительно фиг. 26, а именно того, что говорилось при изложении общего метода, для которого эта фигура служила в качестве типовой. Мы заметим только, в случае, о котором здесь идет речь, так же как и в случае двух любых поверхностей вращения, сечения обеих поверхностей горизонтальными плоскостями будут кругами; мы остановимся на некоторых подробностях относительно касательных, о которых мы еще не имели случая говорить.

74. Чтобы найти касательную в точке D (фиг. 26) к горизонтальной проекции линии пересечения, мы вспомним, что она является проекцией, касательной к линии пересечения двух поверхностей в точке, соответствующей D , и что для ее определения достаточно найти точку S , которая будет горизонтальным следом касательной к линии сечения. Но эта последняя касательная лежит в двух плоскостях, касающихся конических поверхностей в точке пересечения; следовательно, если найти горизонтальные следы Rr , Qq этих двух касательных плоскостей, они определят своим пересечением точку S . Но плоскость, касательная к первой поверхности, касается ее по прямой, которая проходит через вершину, горизонталь-

ную проекцию которой мы получим, проведя неопределенную прямую AD . Если продолжить AD до пересечения в некоторой точке Q горизонтального кругового следа $TQUV$ поверхности, точка Q будет лежать на линии касания поверхности, с плоскостью; следовательно, горизонтальный след плоскости будет касательной к окружности $TQUV$ в точке Q ; проведем эту касательную Qq . Подобным образом, если продолжить радиус BD до пересечения в точке R с окружностью $RXYZ$, представляющей горизонтальный след второй поверхности, и провести к этой окружности касательную в точке R , эта прямая Rr будет горизонтальным следом плоскости, касательной ко второй поверхности. Следовательно, если через точку S пересечения двух касательных Qq и Rr провести прямую SD , то мы получим касательную в точке D к горизонтальной проекции линии пересечения поверхностей.

Касательную в соответствующей точке d вертикальной проекции получим, проектируя точку S в s и проводя затем прямую sd , которая и будет этой касательной.

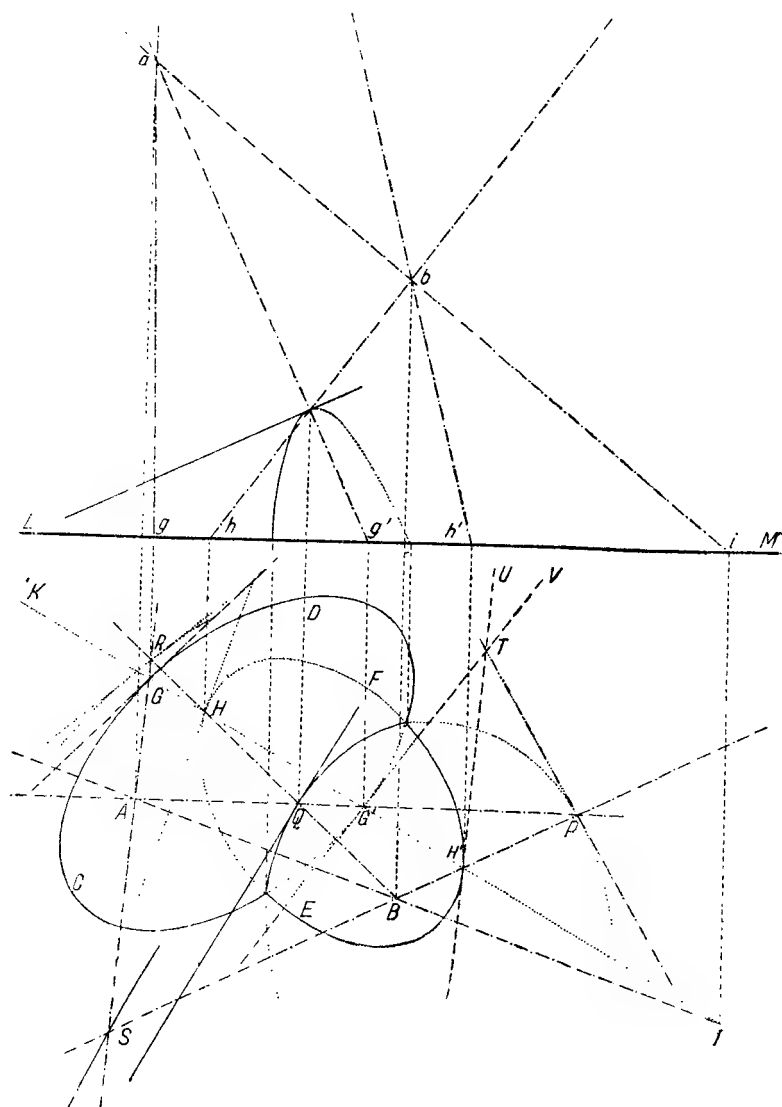
75. Иногда может возникнуть необходимость построения на развертке одной из конических поверхностей, или даже обеих, линии их взаимного пересечения. Такая необходимость может встретиться, например, в том случае, если оба конуса сделаны из гибкого материала, скажем из металлических листов, тогда мы поступим с каждым конусом так, как мы это сейчас изложим для первого.

Заметим сначала, что когда коническая поверхность разворачивается в плоскость, все прямые, лежащие на ней, остаются неизменными как по форме, так и по величине, потому что каждая из них последовательно является шарниром, вокруг которого происходит разворачивание; таким образом, все точки поверхности остаются на том же расстоянии от вершины. Кроме того, если, как в данном случае, коническая поверхность — прямая и круговая, все точки кругового горизонтального следа находятся на одинаковом расстоянии от

вершины; они должны быть также на одинаковом расстоянии от вершины и на развертке и, следовательно, на дуге круга, с радиусом, равным постоянному расстоянию от вершины до кругового следа. Следовательно, если принять произвольную точку за вершину на развертке и описать из нее, как из центра, радиусом, равным aC , дугу неопределенного круга, то эта дуга будет также неопределенной разверткой горизонтального следа поверхности. Наконец, если отложить от точки T следа, с которого мы хотим начать разворачивание, дугу круга TQ на только что описанной дуге, то мы определим положение точки Q на развертке; и неопределенная прямая, проведенная через эту точку к центру развертки, представит собою положение той прямой на поверхности, которая проектируется в AQ и на которой должна находиться точка D , d нанесенной линии пересечения. Для построения этой точки остается только найти ее расстояние от вершины и отложить его на неопределенной прямой от центра развертки. Для этого через точку d на вертикальной проекции проведем горизонталь dk до пересечения с боковой образующей aC конуса в некоторой точке k ; прямая ak будет этим расстоянием. Построив последовательно таким же образом все другие точки линии пересечения и проводя через них кривую, мы получим линию пересечения двух поверхностей, нанесенную на развертке первой; таким же образом мы поступаем и для второй поверхности. ³⁵

76. Задача четвертая. Построить линию пересечения двух конических поверхностей с любыми основаниями.

Решение. Пусть A, a (фиг. 30) проекции вершины первой поверхности; $CGDG'$ — ее заданный след в горизонтальной плоскости; B, b — проекции вершины второй поверхности; и $ENFH'$ — ее след в горизонтальной плоскости. Проведем через обе вершины прямую, проекции которой получим, проведя неопределенные прямые AB, ab , и легко построим ее след в горизонтальной плоскости — точку I . Проведем через эту прямую ряд плоскостей, каждая из которых пересечет обе



Фиг. 30.

конические поверхности по системе нескольких прямых линий; те из них, которые будут лежать в каждой плоскости, определяют своими пересечениями такое же число точек пересечения обеих поверхностей. Горизонтальные следы всех плоскостей этой серии непременно пройдут через точку I ; ввиду того что положение этих плоскостей, вообще говоря, произвольно, можно и их следы задать произвольно, проводя через точку I сколько угодно прямых IK ; для каждой из них мы выполним операцию, которую сейчас изложим для одной.

След KI каждой из плоскостей этого рода пересечет горизонтальный след первой конической поверхности в точках G, G' , которые будут также горизонтальными следами прямых пересечения плоскостью конической поверхности: так AG, AG' будут неопределенными горизонтальными проекциями этих прямых, а вертикальные их проекции получим, проектируя G, G' в g, g' и проводя неопределенные прямые ag, ag' . Подобным же образом след KI первой плоскости их ряда пересечет горизонтальный след второй конической поверхности в точках H, H' ; если провести через них неопределенные прямые BH, BH' , то мы получим горизонтальные проекции прямых, по которым та же плоскость серии пересекает вторую поверхность; их вертикальные проекции получим, проектируя H, H' в h, h' и проводя неопределенные прямые bh, bh' .

Таким образом, для плоскости, горизонтальный след которой есть KI , мы получим в горизонтальной проекции некоторое число прямых AG, AG', BH, BH' ; точки P, Q, R, S пересечения прямых, принадлежащих к одной поверхности с теми, которые принадлежат ко второй, будут горизонтальными проекциями такого же числа точек пересечения обеих поверхностей. Поступая последовательно таким же образом для других линий KI , мы получим новые совокупности точек P, Q, R, S ; проводя затем через все точки P первую ветвь кривой, через все точки Q — вторую и через все точки R — третью, мы получим горизонтальную проекцию искомой линии сечения.

Подобным же образом для той же плоскости, след которой есть KI , мы получим в вертикальной проекции ряд прямых ag, ag', bh, bh' , точки пересечения которых будут вертикальными проекциями такого же числа точек пересечения поверхностей.

Надо заметить, что нет необходимости строить обе проекции кривой пересечения независимо одна от другой и что, построив точку одной из них, можно найти соответствующую точку в другой проекции, проектируя ее при помощи перпендикуляра к пересечению двух плоскостей проекций на одну из прямых, на которой она должна лежать; это дает возможность контролировать операции и избегать в некоторых случаях пересечений прямых под слишком острыми углами.

77. Для нахождения касательных к горизонтальной проекции, например той, которая касается ее в точке P , надо построить горизонтальный след T касательной к линии сечения в точке, соответствующей точке P . Но эта касательная есть пересечение двух плоскостей, касающихся конических поверхностей в этой точке; ее след будет пересечением горизонтальных следов этих двух касательных плоскостей. Кроме того, $AG'P$ — есть проекция прямой касания плоскости с первой поверхностью; таким образом, след этой первой плоскости будет касательной к кривой $CGDG'$ в точке G' ; пусть $G'TV$ — эта касательная. Подобным же образом $BH'P$ — есть горизонтальная проекция прямой касания другой плоскости, касающейся второй поверхности, и след этой второй касательной плоскости будет касательной в точке H' к кривой $EHFH'$; пусть HTU — эта касательная. Обе касательные $G'V, H'U$ пересекутся в некоторой точке T ; если проведем через нее прямую TP , мы получим искомую касательную в точке P .

Рассуждая таким же образом для других точек Q, R, S , мы найдем: 1) что касательная в точке Q должна пройти через точку пересечения касательных в точках G' и H , 2) что касательная в точке R должна пройти через точку пересече-

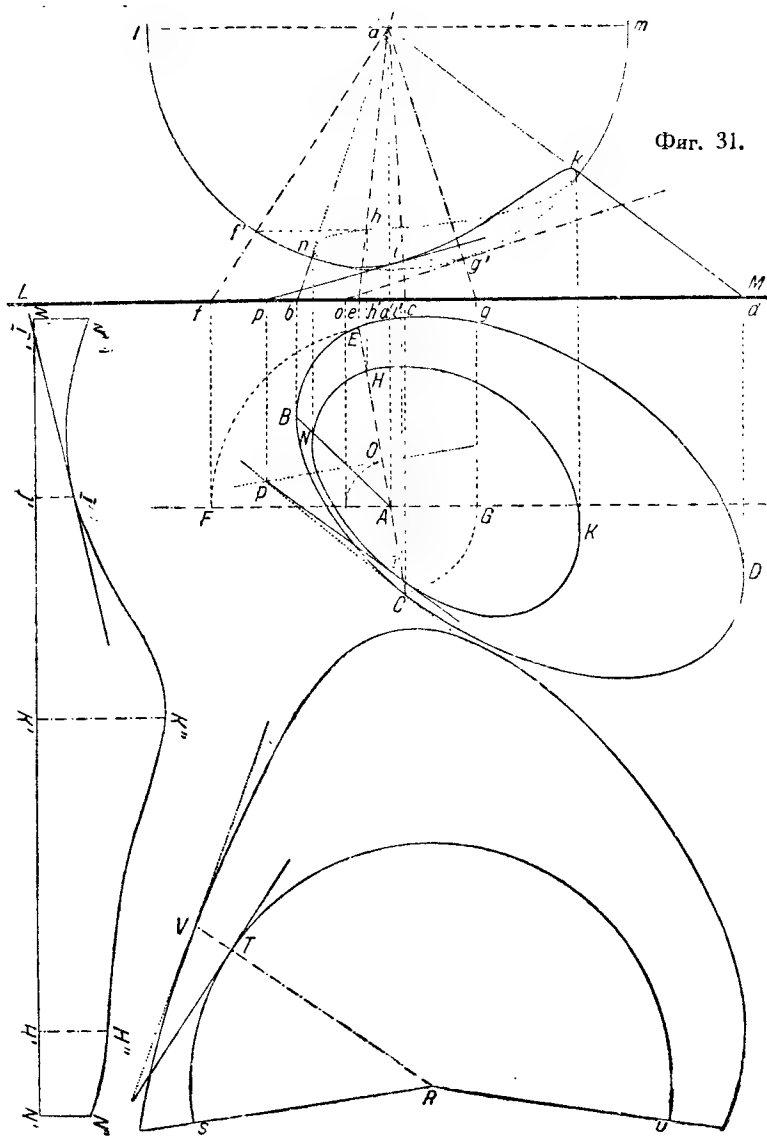
ния касательных в точках H и G , 3) что касательная в точке S должна пройти через точку пересечения касательных в точках G и H' .

Нетрудно найти касательные к вертикальной проекции, когда определены касательные к горизонтальной проекции, ибо, проектируя горизонтальные следы касательных к линии пересечения, мы найдем точки, через которые они должны пройти.

78. Задача пятая. Построить линию пересечения конической поверхности любого основания с поверхностью шара.

Предположим, что в нашем примере обе поверхности концентричны, т. е. что вершина конуса находится в центре шара; этот частный случай будет нужен нам для дальнейшей задачи.

Решение. Пусть A, a (фиг. 31) — проекции общего центра обеих поверхностей; $BCDE$ — заданный горизонтальный след конической поверхности, am — радиус шара и круг $lg'f'm$ — вертикальная проекция шара. Проведем через общий центр обеих поверхностей ряд плоскостей, которые все можно считать перпендикулярными к одной из плоскостей проекций. На фиг. 31 мы предполагаем, что они вертикальны. Каждая из этих плоскостей пересекает коническую поверхность по системе прямых и поверхность шара по окружности одного из его больших кругов; для каждой плоскости точки пересечения этих прямых с окружностью определяют точки искомой линии пересечения поверхностей; пусть через точку A проведено сколько угодно неопределенных прямых CAE , которые будут горизонтальными проекциями стольких же вертикальных вспомогательных плоскостей и в то же время проекциями линий пересечения этими плоскостями обеих поверхностей. Каждая прямая CAE пересечет горизонтальный след $BCDE$ конической поверхности в точках C, E , которые будут горизонтальными следами сечений этой поверхности соответствующей плоскостью; спроектировав точки C, E на LM в c, e и проведя



Фиг. 32.

Фиг. 33.

прямые $ас$, $ае$, мы получим вертикальные проекции тех же сечений. Остается найти точки встречи этих сечений с сечениями шара той же плоскостью.

Для этого, проводя через точку A прямую $GA F$, параллельную LM , мы представим себе, что вертикальная плоскость, проходящая через CE , вращается вокруг вертикали, проходящей через точку A и проектируемой в $a'a$ до тех пор, пока она не станет параллельной вертикальной плоскости проекций; она увлекает за собой свои сечения с двумя поверхностями. В этом движении точки C , E опишут вокруг точки A , как центра, дуги круга CG , EF и займут положение точек G , F ; если спроектировать эти последние точки на LM в g , f , то прямые ag , af будут вертикальными проекциями сечений конической поверхности в их новом положении в результате поворота плоскости. Сечение поверхности шара, рассматриваемое также в его новом положении, будет иметь вертикальной проекцией окружность $l'f'g'm$. Поэтому точки g' , f' встречи этой окружности с прямыми ag , af будут проекциями точек искомой линии пересечения, также рассматриваемых в новом положении плоскости.

Чтобы получить проекции тех же точек в их естественном положении, надо предположить, что вертикальная вспомогательная плоскость вернулась в свое исходное положение. При этом движении все точки плоскости, а следовательно, и лежащие в ней точки линии пересечения поверхностей, опишут дуги горизонтальных кругов вокруг вертикали, проходящей через точку A как вокруг оси; вертикальные проекции последних будут горизонтальными прямыми. Поэтому, если через точки f' , g' провести горизонталы $f'h$, $g'i$, то они будут заключать вертикальные проекции точек линии пересечения; но эти проекции должны также находиться на соответственных прямых $ас$, $ае$; следовательно, они будут лежать в точках пересечения i , h этих последних прямых с горизонталями $g'i$, $f'h$. Таким образом, кривая $khni$, проведенная через все точки, построенные таким же образом для всякой другой прямой,

отличной от CE , будет вертикальной проекцией искомой линии пересечения поверхностей.

Если спроектировать точки i, h на CE в точки I, H , то мы получим горизонтальные проекции тех же точек линии пересечения, и кривая $KHNI$, проведенная через все точки I, H , построенные таким же образом для всякой другой прямой, отличной от CE , будет горизонтальной проекцией линии пересечения поверхностей.

79. Чтобы найти касательную в точке I горизонтальной проекции надо построить горизонтальный след P касательной в соответствующей точке кривой пересечения поверхностей. Этот след должен находиться на пересечении следов плоскостей, касательных к обеим поверхностям в точке пересечения, соответствующей точке I . Но очевидно, что если через точку C провести к кривой $BCDE$ касательную CP , мы и получим след касательной плоскости к конической поверхности. Что касается следа плоскости, касательной к шару, то мы поступим так же, как для поверхностей вращения, т. е. проведем через точку g' к окружности $l'f'g't$ касательную $g'o$, продолженную до встречи с прямой LM в точке o , отложим на CE отрезок AO , равный $a'o$, и проведем через точку O прямую OP , перпендикулярную CE . Оба следа CP, OP пересекутся в точке P ; проводя через нее прямую IP , мы найдем касательную в точке I .

Наконец, очевидно, что мы найдем касательную в точке i вертикальной проекции линии пересечения поверхностей, проектируя точку P на LM в точку p и проводя затем прямую ip , которая и будет искомой касательной.

80. Если бы сфера и коническая поверхность не были концентричны, следовало бы провести через оба их центра прямую и выбрать такие вспомогательные секущие плоскости, которые проходили бы через эту прямую. Каждая из этих плоскостей пересекала бы коническую поверхность по прямым, а поверхность шара — по одному из его больших кругов, как

в предыдущем случае, что также привело бы к простому построению; но в этом случае было бы выгодно выбрать вертикальную плоскость проекций параллельной прямой, проходящей через оба центра, чтобы, при вращении каждой секущей плоскости до параллельности вертикальной плоскости проекций, оба центра были неподвижны и их проекции не изменялись бы — последнее упрощает построение.³⁶

81. Задача шестая. Построить развертку конической поверхности с любым основанием и нанести на развернутой поверхности сечение, проекции которого даны.

Решение. Рассмотрим поверхность шара произвольного радиуса с центром, совпадающим с вершиной конуса, и построим, как мы это сделали в предыдущем случае, проекции линии сечения обеих поверхностей. Очевидно, что, так как все точки сферического сечения лежат на одинаковом расстоянии от вершины, они должны находиться на том же расстоянии от нее и на развернутой поверхности, и, следовательно, будут лежать на дуге круга, описанного из вершины как из центра, радиусом, равным радиусу шара. Полагая, что точка R (фиг. 33) — вершина развернутой поверхности, опишем из нее как из центра, радиусом, равным am (фиг. 31) дугу неопределенного круга STU ; все точки сечения сферы расположатся на этой дуге таким образом, что ее части будут равны соответственным частям сечения сферы. Следовательно, надо, выбрав на этом сечении произвольную исходную точку, напр. с проекциями N, n (фиг. 31), и точку S (фиг. 33), соответствующую ей на развернутой поверхности, развернуть различные дуги сферического сечения и нанести их последовательно на дугу круга STU от точки S до точки T . Ввиду того что сферическая кривая обладает двойкой кривизной, надо предварительно избавиться от двойкой кривизны, не изменяя ее длины, следующим образом.

Сферическое сечение проектируется на горизонтальную плоскость в $NIKH$ (фиг. 31), и его можно рассматривать как

нанесенное на поверхность вертикального цилиндра с основанием $NIKH$; следовательно, эту поверхность можно развернуть, как мы это показали (фиг. 27), и нанести сферическое сечение на эту развернутую цилиндрическую поверхность, разворачивая дугу NI (фиг. 31) в $N'I'$ (фиг. 32) и откладывая вертикаль $I'I''$, равную $i'i$, перпендикулярно $N'N'$ (фиг. 32). Кривая $N''I''K''N''$, которая пройдет через все точки I'' , таким образом определенные, будет сферическим сечением, лишенным своей горизонтальной кривизны без изменения длины. Касательную к этой кривой в точке I'' получим, откладывая на $N'N'$ (фиг. 32) $I'P'$, равную IP , и проводя прямую $I'P'$.

Развернем кривую $N''I''K''H''N''$ и наложим ее на дугу STU (фиг. 33); напр. отложим дугу $N''I''$ от S к T ; в точку T на развернутой конической поверхности ляжет точка сферического сечения с проекциями I, i (фиг. 31). Следовательно, проведя прямую RT , мы получим на развертке поверхности образующую, горизонтальная проекция которой будет AC (фиг. 31). Наконец, если на этой образующей находится точка, которую надо нанести на развернутую поверхность, достаточно определить расстояние (фиг. 31) этой точки до вершины конической поверхности и отложить равный ему отрезок RV на прямой RT ; точка V будет рассматриваемой точкой на развернутой поверхности.³⁷

82. Задача седьмая. Построить пересечение двух цилиндрических поверхностей с любыми основаниями.

Решение. Если при решении данной задачи нет необходимости рассматривать другие линии сечения, кроме линии пересечения цилиндрических поверхностей, в особенности, если эти поверхности имеют круговые основания, — выгодно выбирать плоскости проекций таким образом, чтобы одна из них была параллельна образующим обоих цилиндров. Тогда для построения линии пересечения не нужно прибегать ни к каким другим кривым, кроме данных. Но если надо одновременно рассматривать линии пересечения этих поверхностей

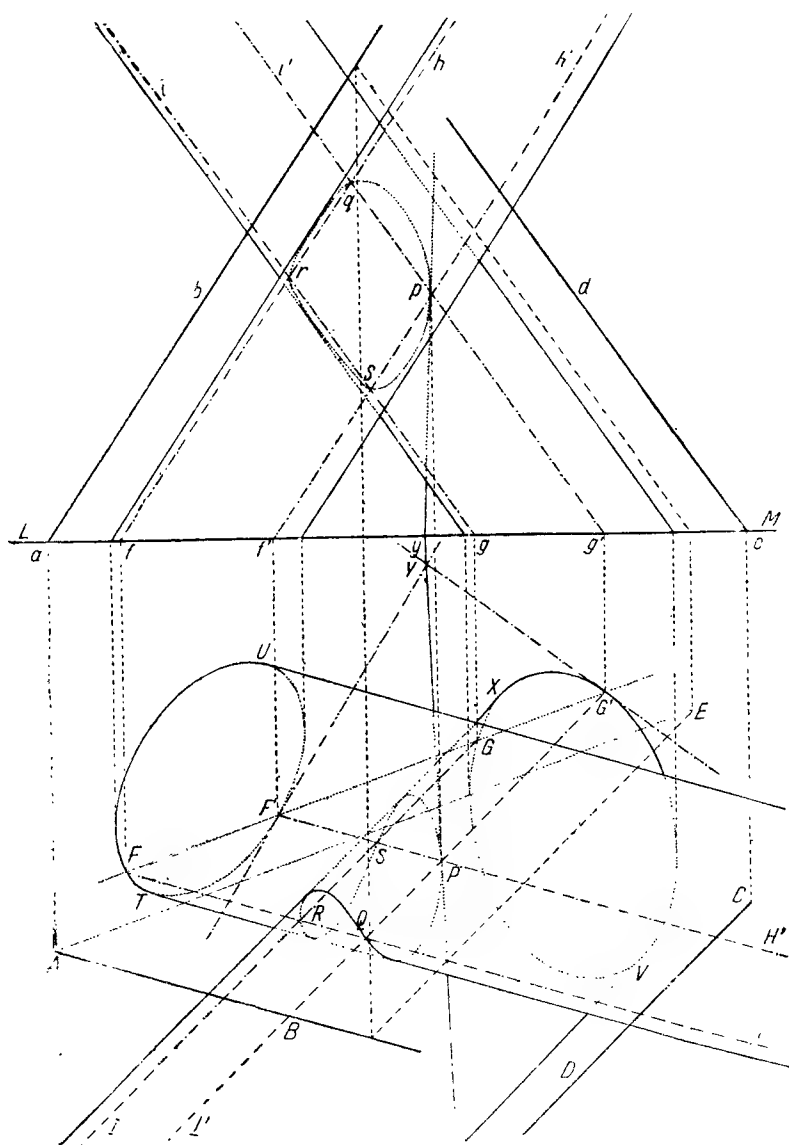
с другими, — замена плоскостей проекций не представляет преимуществ, и даже легче представить все фигуры, относя их все к тем же плоскостям.

Поэтому мы будем предполагать, что образующие поверхностей расположены как угодно относительно плоскостей проекций.

Пусть (фиг. 34) $1FF'U$, $XGG'V$ — заданные горизонтальные следы двух цилиндрических поверхностей; AB , ab данные проекции прямой, которой должна быть параллельна образующая первой поверхности; CD , cd — проекции прямой, которой должна быть параллельна образующая второй поверхности. Построим ряд плоскостей, параллельных обоим образующим. Эти плоскости пересекут обе поверхности по прямым. Точки встречи сечений первой поверхности с сечениями второй определяют точки искомой линии пересечения поверхностей.

Построив, как на фиг. 15, горизонтальный след AE плоскости, проходящей через первую заданную прямую параллельно второй, проведем параллельно этому следу сколько угодно прямых FG' , и будем рассматривать эти параллельные линии как следы ряда плоскостей. Каждая прямая FG' пересечет след первой поверхности в точках F , F' и след второй в других точках G , G' , через которые проведем прямые FH , $F'H'$, ... GI , $G'I'$..., параллельные проекциям соответственных образующих; точки встречи P , Q , R , S этих прямых будут горизонтальными проекциями такого же числа точек линии пересечения обеих поверхностей. Поступая также для ряда прямых FG' , найдем несколько систем точек P , Q , R , S , и кривая, проведенная через все эти точки, будет горизонтальной проекцией линии пересечения поверхностей.

Для нахождения вертикальной проекции надо спроектировать на LM точки F , F' , ... G , G' , ..., в точки f , f' , ..., g , g' , ... и провести через них прямые fh , $f'h'$, ... gi , $g'i'$, ... параллельные проекциям соответственных образующих, которые своими пересечениями определяют вертикальные проекции p , q , r , s



Фиг. 34.

точек линии сечения поверхностей. Поступая таким же образом для всех других прямых FG , найдем новые точки p, q, r, s ; и кривая, которая пройдет через все эти точки, будет вертикальной проекцией линии пересечения.

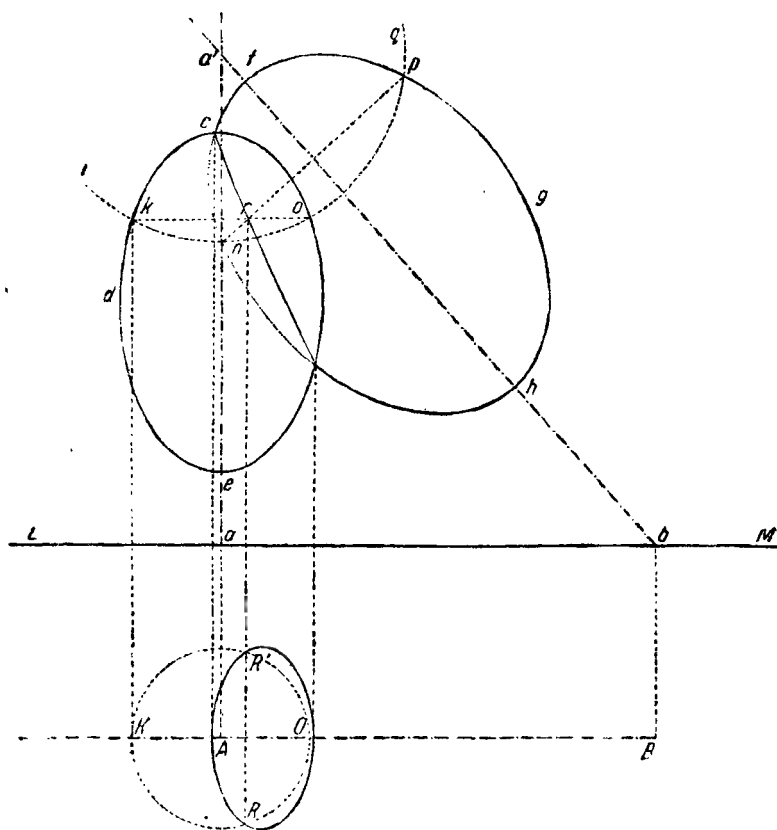
Чтобы получить касательные к этим кривым в точках P, p , построим горизонтальный след $F'Y$ плоскости, касательной в этой точке к первой цилиндрической поверхности; затем построим след $G'Y$ плоскости, касательной в той же точке ко второй цилиндрической поверхности; прямая, проведенная из точки P в точку Y пересечения этих следов, будет касательной в P . Наконец, проектируя Y на LM в точку y и проводя прямую py , получим касательную в точке p вертикальной проекции.³⁸

83. Задача восьмая. Построить пересечение двух поверхностей вращения, оси которых лежат в одной плоскости.

Решение. Расположим плоскости проекций таким образом, чтобы одна из них была перпендикулярна оси одной из поверхностей, а другая была бы параллельна обоим осям. Согласно этому пусть будет A (фиг. 35) горизонтальная проекция оси первой поверхности, aa' — ее вертикальная проекция и cde — заданная образующая этой поверхности. Пусть прямая AB , параллельная LM , будет горизонтальной проекцией оси второй поверхности и $a'b'$ — ее вертикальной проекцией, так что A и a' — проекции точки пересечения обеих осей; и пусть fgh — заданная образующая этой второй поверхности. Построим ряд сферических поверхностей, общий центр которых помещен в точке пересечения двух осей. Построим для каждой из поверхностей этой серии проекцию $iknopq$ большого круга, параллельного вертикальной плоскости проекций; и эти проекции, которые будут дугами окружности, описанной из a' , как из центра, произвольными радиусами пересекут обе образующие в точках k, p .

Каждая сферическая поверхность пересечет первую поверхность по окружности круга, плоскость которого будет перпен-

дикулярна оси aa' , и вертикальную проекцию которого получим, проведя горизонталь ko ; для построения горизонтальной проекции этого круга опишем из точки A , как из центра



Фиг. 35.

окружность круга $KROR'$, диаметр которого будет равен ko . Подобным же образом каждая из сферических поверхностей пересечет вторую поверхность вращения по окружности круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной вертикальной

плоскости проекций, вертикальную проекцию которого получим, проводя через точку p прямую pn , перпендикулярную $a'b'$.

Если точка $г$, в которой пересекаются прямые ko и pn , лежит от соответственных осей на меньшем расстоянии, чем точки k , p , то очевидно, что обе окружности кругов пересекаются в двух точках, имеющих общую вертикальную проекцию в точке $г$; и кривая, проведенная через все построенные таким образом точки $г$, будет вертикальной проекцией линии пересечения двух поверхностей. Проектируя точку $г$ на окружность круга $KROR'$ в точки R и R' , мы получим горизонтальные проекции двух точек пересечения окружностей кругов, лежащих на одном и том же шаре; кривая, проведенная через все точки R , R' , таким образом построенные, будет горизонтальной проекцией искомой линии пересечения.

Этих примеров достаточно, чтобы показать способ построения линий пересечения поверхностей и проведения касательных, особенно, если ученики постараются чертить с наибольшей точностью, в большом масштабе и, по возможности, строить кривые во всем их протяжении.

Способ Роберваля построения касательной к кривой, заданной законом движения образующей точки. Применение этого способа к эллипсу и к линии пересечения двух эллипсоидов вращения, имеющих общий фокус

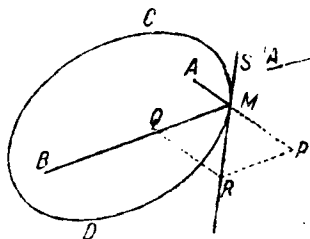
84. Выше мы рассматривали кривые двойкой кривизны, как определенные двумя кривыми поверхностями, линией пересечения которых они являются, и, действительно, под этим углом зрения они чаще всего и рассматриваются в начертательной геометрии. Мы видели, что в этом случае всегда возможно провести к ним касательные. Но, подобно тому как кривая поверхность может быть определена формой и движением ее образующей, может оказаться, что кривая задана законом движения образующей точки. Для того чтобы в этом случае провести касательную к кривой,

не прибегая к анализу, можно воспользоваться способом Роберваля. Этот способ, предложенный им до применения Декартом алгебры к геометрии, неявно заключается в способах дифференциального исчисления и потому не упоминается в изложении элементов математики; мы изложим его только в общих чертах. Желающие изучить многочисленные применения этого метода [могут найти их в „Мемуарах Академии Наук“ (*Mémoires de l'Académie des Sciences*)], предшествующих 1699 году, в которых собраны работы Роберваля.

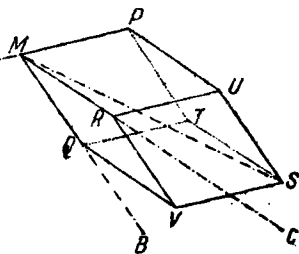
85. Если, согласно закону своего движения, образующая точка неизменно стремится к одной и той же точке пространства, линия, которую она описывает в силу этого закона, будет прямой; но если в каждый данный момент движения образующая точка стремится одновременно к двум точкам, то описываемая ею линия, вообще говоря, будет кривая и только в некоторых частных случаях может также оказаться прямой. Для построения касательной к этой кривой проведем через расположенную на ней точку две прямые по двум различным составляющим направления движения образующей точки, отложим на этих прямых в надлежащем направлении отрезки, пропорциональные соответственным скоростям точки; построим параллелограмм и проведем его диагональ, которая и будет искомой касательной, так как эта диагональ будет совпадать с направлением движения образующей точки в рассматриваемой точке кривой.

86. Приведем только один пример. Пусть нить AMB (фиг. 36), привязана своими концами в двух неподвижных точках A и B ; если натянуть эту нить при помощи иглы M и двигать эту последнюю так, чтобы нить всегда оставалась натянутой, то игла опишет кривую DCM , которая, как известно, будет эллипсом с фокусами в неподвижных точках A и B . Образование этой кривой таково, что к ней очень легко провести касательную по способу Робер-

валя. Действительно, так как длина нити неизменна, радиус-вектор AM в каждый данный момент движения увеличивается на ту же величину, на которую радиус-вектор BM уменьшается. Скорость образующей точки в направлении AM равна ее скорости в направлении MQ . Следовательно, если на MB и на продолжении AM отложить равные отрезки MQ и MP и построить параллелограмм $MPRQ$, то диагональ MR этого параллелограмма будет направлением движения образующей точки в M и, следовательно, касательной к кривой в этой



Фиг. 36.



Фиг. 37.

точке. Из сказанного очевидно, что касательная к эллипсу делит пополам угол BMP , образуемый одним из радиусов-векторов с продолжением другого, что углы AMS и BMR между собой равны и что кривая должна обладать свойством отражать лучи света, исходящие из одного фокуса в другой фокус.

Легко можно распространить способ Роберваля на случай трех измерений и применить его к построению касательных к кривым двойкой кривизны. Действительно, если образующая точка движется в пространстве таким образом, что в каждый момент своего движения она стремится к трем различным точкам, кривая, которую она описывает (и которая в некоторых частных случаях может быть плоской и даже прямой, вообще говоря, — кривая двойкой кривизны. Для построения касательной к этой кривой в некоторой точке надо провести через эту точку прямые по трем различным составляющим

направления движения образующей точки и отложить на этих прямых в надлежащем направлении отрезки, пропорциональные трем соответственным скоростям точки; диагональ параллелепипеда, построенного на этих прямых, будет касательной к кривой в рассматриваемой точке.

87. Мы применим этот метод к случаю, аналогичному эллипсу; и на фиг. 37, которой мы будем пользоваться, представим построение в перспективе, но не в проекции.³⁹

В пространстве заданы три неподвижные точки A, B, C ; пусть первая нить AMB привязана своими концами к точкам A и B ; пусть другая нить AMC , по величине независимая от первой, привязана своими концами в точках A и C ; если обрзующая точка, захватывающая одновременно обе нити, движется таким образом, что обе они остаются все время натянутыми, она опишет кривую двоякой кривизны.⁴⁰ Для проведения к этой кривой касательной в точке M заметим, что так как длина первой нити постоянна, приращение отрезка AM в каждый данный момент движения равно уменьшению отрезка BM , и что скорость образующей точки в направлении AM равна ее скорости в направлении MB . Таким же образом, поскольку длина нити AMC постоянна, скорость образующей точки в направлении MC также равна ее скорости в направлении AM . Следовательно, если на продолжении AM и на прямых MB и MC отложить равные отрезки MP, MQ, MR и построить параллелепипед $MPUSVQRT$, диагональ MS этого параллелепипеда будет искомой касательной.

Так как способ Роберваля построен на принципе сложения движений, легко убедиться, что в случаях менее простых, чем приведенные два примера, можно воспользоваться известными способами нахождения равнодействующей сил, приложенных к одной точке, величина и направление которых известны.⁴¹

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

Применение пересечений поверхностей к решению различных задач

88. Мы дали (фиг. 26) способ построения проекций линий пересечения двух кривых поверхностей, определенных по форме и положению; мы это сделали отвлеченным образом, не занимаясь природой вопросов, для которых подобные исследования могли бы понадобиться. Такое абстрактное изложение достаточно для различных областей искусства; так, если взять для примера искусство резки камней или дерева, то рассматриваемые здесь кривые поверхности, линии пересечения которых отыскиваются, составляют обычно главную задачу и представляются в явном виде. Но поскольку начертательная геометрия должна стать когда-нибудь одним из главных вопросов народного образования, ибо даваемые ею методы нужны мастерам своего дела не меньше чем чтение, письмо или арифметика, мы считаем полезным показать на нескольких примерах, как она может дополнять анализ при решении большого числа вопросов, на первый взгляд далеких от возможности применения к ним этих способов. Мы начнем с примеров, требующих пересечения плоскостей, и перейдем затем к таким, для которых нужны пересечения кривых поверхностей.

89. Первая задача, которая обычно поражает всех начинающих изучение элементарной геометрии, — это нахождение центра круга, окружность которого проходит через три произвольные точки на плоскости. Определение центра как пересечения двух прямых линий, на каждой из которых он должен находиться, поражает учеников как своей общностью, так и немедленным получением результата. Если бы вся геометрия рассматривалась подобным образом, что вполне возможно, она была бы доступна большему числу людей и имела бы значительно большее распространение; средний уровень образования народа был бы значительно выше, и самая наука стала бы больше развиваться. Мы сейчас разберем вопрос, аналогичный только что упомянутому для трех измерений.

90. Задача первая. Найти центр и радиус шара, поверхность которого проходит через четыре произвольно заданные точки в пространстве.

Решение. Пусть четыре точки заданы своими горизонтальными и вертикальными проекциями; соединим одну из них со всеми остальными и построим горизонтальные и вертикальные проекции этих трех прямых. Рассмотрим первую прямую: очевидно, что искомый центр должен находиться на равном расстоянии от двух ее концов и, следовательно, лежать в плоскости, перпендикулярной к этой прямой и проходящей через ее середину. Если, следовательно, разделить пополам проекции этой прямой, получив таким образом проекции ее середины, и построить следы плоскости, проходящей через точку перпендикулярно прямой, что мы умеем делать, — мы найдем следы плоскости, в которой должен лежать искомый центр. Рассматривая затем две другие прямые и выполняя для них последовательно ту же операцию, мы найдем следы трех плоскостей, в каждой из которых должен находиться искомый центр. Но если центр должен находиться в первой и второй плоскостях, он должен принадлежать линии их пересечения, поэтому, если построить проекции этой линии пере-

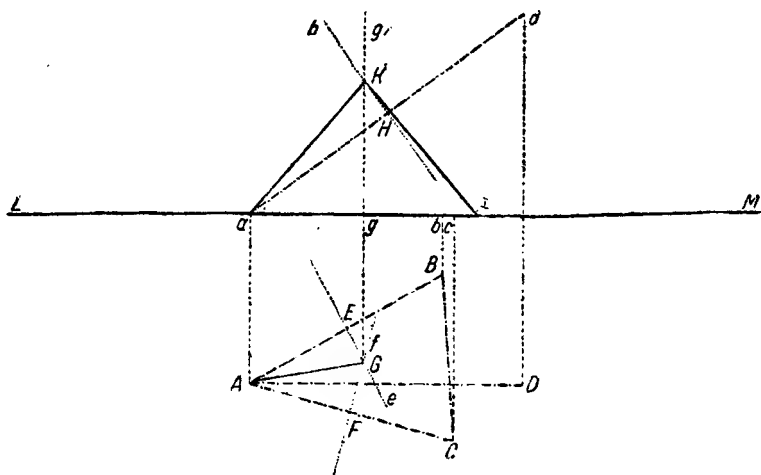
сечения, мы получим в каждой плоскости проекций прямую, на которой будет лежать проекция центра. Таким же образом, если мы построим проекции пересечения первой и третьей плоскостей, мы получим в каждой плоскости проекций еще одну прямую, на которой должна лежать проекция центра. Следовательно, в каждой плоскости проекций мы имеем две прямых, пересечение которых определяет искомую проекцию центра шара.

Если рассмотреть пересечение второй и третьей плоскостей, то мы получим третью прямую, проходящую через центр, и проекции которой тоже проходят через искомые проекции, что дает способ контроля.

Что касается радиуса, то очевидно, что прямая, проведенная через проекции центра и одной из заданных точек, будет его проекцией; следовательно, можно получить горизонтальную и вертикальную проекции радиуса и, тем самым, его величину.

91. Если мы можем выбирать положение плоскостей проекций,⁴² то предыдущий способ может быть существенно упрощен. Действительно, предположим, что та плоскость, которую мы рассматриваем как горизонтальную, проходит через три из заданных точек (фиг. 38); таким образом, из заданных проекций A , B , C , D четырех точек, — три первые совпадают с их соответственными точками; после этого, проведя три прямые AB , AC , AD , предположим, что вертикальная плоскость проекции параллельна AD , т. е. что прямые LM и AD параллельны между собой; вертикальные проекции трех первых точек на LM пусть будут a , b , c , а проекция четвертой точки будет лежать в некоторой точке d прямой Dd , перпендикулярной LM . Так как прямая, проходящая через точки A и B , горизонтальна, всякая плоскость, перпендикулярная к ней, будет вертикальна, и ее горизонтальная проекция будет перпендикулярна AB . То же самое справедливо относительно прямой, проходящей через точки A и C .

Следовательно, если из середины отрезка AB восстановить неопределенный перпендикуляр Ee , то этот перпендикуляр будет горизонтальной проекцией вертикальной плоскости, проходящей через центр шара, и горизонтальная проекция центра будет лежать где-то на прямой Ee . Подобным же образом, если из середины AC восстановить неопределенный перпен-



Фиг. 38.

дикуляр Ff , то этот перпендикуляр будет проекцией второй вертикальной плоскости, проходящей через центр шара; горизонтальная проекция этого центра будет лежать где-то на прямой Ff ; следовательно, точка G , в которой пересекаются прямые Ee и Ff , будет горизонтальной проекцией центра шара; его вертикальная проекция будет лежать на неопределенной прямой Ggg' .

Так как прямая, проведенная из точки / в четвертую точку, параллельна своей вертикальной проекции ad , всякая плоскость, к ней перпендикулярная, будет также перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций и будет иметь вертикальной проекцией прямую, перпендикулярную ad . Следова-

тельно, если из середины ad восстановить неопределенный перпендикуляр Hh , мы получим проекцию третьей плоскости, проходящей через центр шара; так как вертикальная проекция этого центра должна находиться одновременно на gg' и на Hh , она будет лежать в точке K пересечения этих прямых.

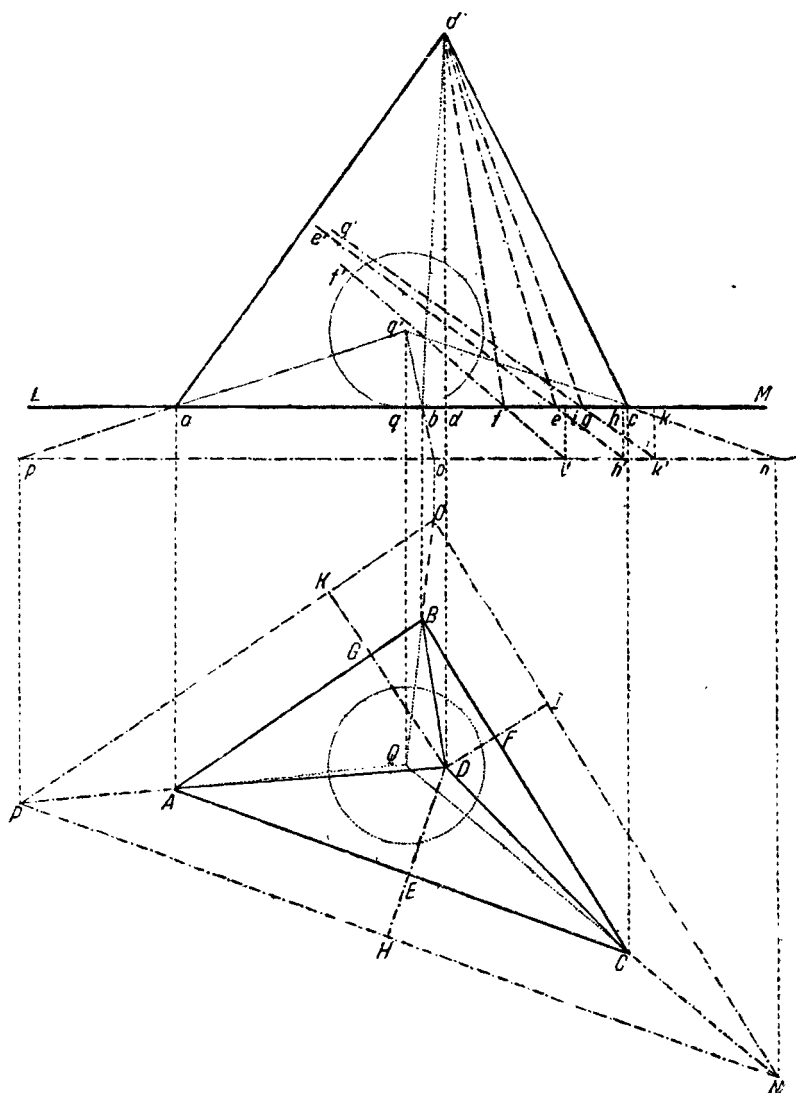
Наконец, если провести две прямые AG и $a\zeta$, мы, очевидно, получим две проекции одного и того же радиуса шара; следовательно, если мы на LM отложим отрезок gI , равный AG , то прямая IK определит величину искомого радиуса.

92. Задача вторая. Вписать шар в заданную треугольную пирамиду, т. е. найти положение центра шара и величину его радиуса.

Решение. Так как поверхность вписанного шара должна касаться четырех граней пирамиды, очевидно, что если через центр шара и каждое из его шести ребер провести плоскость, эта плоскость разделит пополам угол, образуемый двумя гранями, проходящими через то же ребро. Если, следовательно, выбрать из шести ребер три, которые не проходят все через одну вершину трехгранного угла, и если через каждое из этих ребер провести плоскость, делящую пополам угол, образованный двумя соответственными гранями, то мы получим три плоскости, в каждой из которых должен лежать центр искомого шара; его положение определится взаимным пересечением этих плоскостей.

93. Для упрощения построения предположим, что плоскости проекций выбраны таким образом, что принимаемая за горизонтальную совпадает с одной из граней пирамиды.

Итак, пусть (фиг. 39) A, B, C, D — заданные горизонтальные проекции вершин четырех трехгранных углов пирамиды и a, b, c, d' — их вертикальные проекции; проведем через вершину пирамиды плоскости, перпендикулярные к трем сторонам ее основания; эти плоскости будут вертикальны, и их горизонтальными проекциями будут прямые DE, DF, DG ,



Фиг. 39.

опущенные из точки D перпендикулярно к сторонам основания AC , CB , BA . Каждая из этих плоскостей пересечет основание пирамиды и грань, проходящую через ребро, по двум прямым, составляющим между собой угол, равный углу между гранью и основанием. Следовательно, если отложить на LM от вертикали Ddd' отрезки de , df , dg , равные DE , DF и DG , и провести через вершину d' прямые $d'e$, $d'f$, $d'g$, то эти прямые образуют с LM углы, равные тем, которые соответственные грани пирамиды составляют с основанием; и если разделить каждый из этих углов пополам прямыми ee' , ff' , gg' , то углы, образуемые последними с LM , будут равны углам, которые составляли бы с основанием грани второй пирамиды, имеющей то же основание, что и первая, и вершина которой лежала бы в центре искомого шара.

Чтобы найти вершину этой второй пирамиды, пересечем ее горизонтальной плоскостью на произвольной высоте и найдем вертикальную проекцию этой секущей плоскости, проводя случайную горизонталь pl . Эта прямая пересечет ee' , ff' , gg' в точках h' , i' , k' , из которых проведем к LM вертикали $h'h$, $i'i$, $k'k$; отложив на соответственных перпендикулярах отрезки EH , FI и GK , равные трем расстояниям eh , fi и gk , мы получим в точках H , I , K горизонтальные проекции точек, лежащих на трех гранях второй пирамиды и находящихся в произвольной горизонтальной плоскости. Следовательно, если через точки H , I , K провести прямые NP , NO , OP , параллельные соответственным сторонам основания, то эти прямые будут проекциями сечения трех граней второй пирамиды той же горизонтальной плоскостью; они пересекаются в точках N , O , P , которые будут проекциями такого же числа точек трех ребер второй пирамиды; если через эти точки провести к вершинам соответственных углов основания неопределенные прямые AP , BO , CN — эти прямые будут проекциями ребер; наконец, единственная точка их пересечения Q будет горизонтальной проекцией вершины второй пирамиды, и, следовательно, центром искомого шара.

Чтобы получить вертикальную проекцию этого центра, проведем сначала неопределенную прямую проекций Qqq' , на которой она должна лежать; затем спроектируем точки N, O, P на горизонталь np в точки n, o, p ; через проекции a, b, c вершин соответствующих углов основания проведем прямые ap, bo, cp , которые будут вертикальными проекциями трех ребер; единственная точка q' , где пересекаются эти три последние прямые и которая будет лежать на Qqq' , будет вертикальной проекцией центра шара.

Наконец, вертикаль qq' будет, очевидно, равна радиусу вписанного шара, и точки Q, q будут проекциями точки касания поверхности шара с плоскостью основания.

94. Выше мы привели (§ 3) соображения, по которым определяется положение точки, если известно ее расстояние до трех заданных точек; мы дадим здесь построение решения этой задачи.

Задача третья. Построить проекции точки, расстояния которой до трех других заданных точек в пространстве известны.

Решение. Предположим, что плоскости проекций выбраны таким образом, что та, которую мы считаем горизонтальной, проходит через три заданные точки, и что другая плоскость перпендикулярна прямой, соединяющей две из этих точек. Согласно этому, пусть A, B, C (фиг. 40) — три заданные точки, A', B', C' — заданные расстояния от них до искомой точки. Соединим две из этих точек прямой AB , перпендикулярно которой проведем прямую LM , определяющую положение вертикальной плоскости проекций. Затем из точек A, B, C , как из центров, радиусами, равными соответственным расстояниям A', B', C' , опишем три дуги окружности, пересекающиеся попарно в точках D, E, F, I, P, Q ; через точки пересечения этих дуг, взятые попарно, проведем прямые DE, FI, PQ ; они будут горизонтальными проекциями окружностей кругов, по которым пересекаются три шара;

Читатель может сам предложить себе построить проекции точки, расстояние которой от трех заданных прямых в пространстве известно.

95. Задача четвертая. Инженер проходит с топографической картой по гористой местности с целью изучения рельефа местности или составления проекта общественных работ, связанных с этим рельефом; на карте точно указаны не только проекции различных точек местности, но даны также и высоты всех точек над некоторой поверхностью уровня, характеризующиеся числами, помещенными рядом с соответствующими точками, которым присваивается наименование *отметок*. Он находит некоторую замечательную точку в данной местности, отсутствующую на карте потому ли, что она была пропущена, или потому, что она стала замечательной после изготовления карты. Инженер имеет с собой только угломерный инструмент, снабженный отвесом.

Требуется, чтобы он, не покидая места, нанес на карту положение точки, в которой он находится, и определил ее числовую отметку, т. е. ее высоту над поверхностью уровня.

Способ решения. Инженер должен выбрать три точки, точно обозначенные на карте, и возможно более близкие между собой, из которых по крайней мере две не лежат на одной высоте с определяемым пунктом; затем он измеряет углы, составляемые с вертикальной линией направлениями на эти три точки, — этого одного наблюдения достаточно для решения вопроса.

Пусть A, B, C — три наблюдаемые точки, горизонтальные проекции которых даны на карте, а вертикальные проекции он сможет построить при помощи числовых отметок. Так как ему известен угол, образуемый вертикальной линией с визирной линией на точку A , то он знает также угол, образуемый той же визирной линией и вертикалью, восстановленной в точке A ; ибо, пренебрегая кривизной земной поверхности,

что здесь вполне допустимо, можно считать эти углы равными, как внутренние накрест лежащие.

Если построить коническую поверхность с круговым основанием, вершина которой совпадает с точкой A , ось вертикальна, и угол между осью и образующей равен наблюдаемому углу, что вполне определяет поверхность, то она пройдет через визирную линию, направленную в точку A , и, следовательно, через определяемый пункт; таким образом, будет найдена первая кривая поверхность, на которой находится искомая точка. Рассуждая таким же образом для двух других точек B и C , мы найдем, что искомая точка лежит также на двух других конических поверхностях с круговыми основаниями, оси которых вертикальны, а вершины лежат в точках B и C , и для каждой из которых угол между осью и образующей будет равен углу между вертикальной линией и соответствующей визирной линией. Поэтому искомая точка будет лежать одновременно на трех конических поверхностях, определенных по форме и положению, и, следовательно, на их взаимном пересечении. Поэтому вопрос сводится к построению, на основании всех данных величин, горизонтальной и вертикальной проекций линий сечения трех поверхностей, рассматриваемых попарно; пересечения этих проекций дадут горизонтальную и вертикальную проекции искомой точки, и, следовательно, ее положение на карте и ее высоту относительно точек сравнения, что определит ее числовую отметку.

Это решение даст, вообще говоря, восемь точек, удовлетворяющих условиям; наблюдатель легко отличит среди них ту, которая соответствует определяемому пункту. Прежде всего, он всегда может легко убедиться в том, находится ли определяемый пункт выше или ниже плоскости, проходящей через три опорные точки. Предположим, что этот пункт расположен выше плоскости, заключающей вершины конусов; следовательно, можно будет отбросить те части линий пересечения конических поверхностей, которые находятся ниже этой пло-

скости; тем самым число возможных точек сокращается до четырех.

То же имело бы место, если бы определяемый пункт находился, наоборот, ниже этой плоскости. Затем из оставшихся четырех точек — если они все существуют — наблюдатель легко узнает ту, положение которой относительно трех вершин аналогично положению определяемого пункта относительно опорных точек.⁴³

96. Построение. Пусть A, B, C (фиг. 41) горизонтальные проекции трех наблюдаемых точек, взятые с карты; a, b, c — вертикальные проекции тех же точек; для построения этих последних нанесем на вертикали Bb, Cc от горизонтали LM , проходящей через точку a , разности числовых отметок двух других точек; и пусть A', B', C' — наблюдаемые углы, образованные визирными линиями, направленными в точки A, B, C с направлением вертикальной линии.

Построим неопределенные вертикали aa', bb', cc' , которые будут вертикальными проекциями осей трех конусов; через три точки a, b, c проведем прямые al, bm, cn , которые составят с этими вертикалями углы, соответственно равные измеренным углам A', B', C' ; эти прямые будут вертикальными проекциями одной из двух предельных образующих соответствующей конической поверхности.

После этого проведем в вертикальной проекции сколько угодно горизонтальных прямых ee' и будем рассматривать их как проекции такого же количества горизонтальных плоскостей; для каждой из них мы выполним операцию, которую сейчас изложим для одной из них, EE' .

Эта прямая пересечет проекции осей трех конусов в точках f, g, h , которые будут вертикальными проекциями центров кругов пересечения соответственной горизонтальной плоскостью трех конических поверхностей; она пересечет также предельные образующие конусов al, bm, cn в точках f', g', h' , и расстояния ff', gg', hh' будут радиусами этих самых кругов.

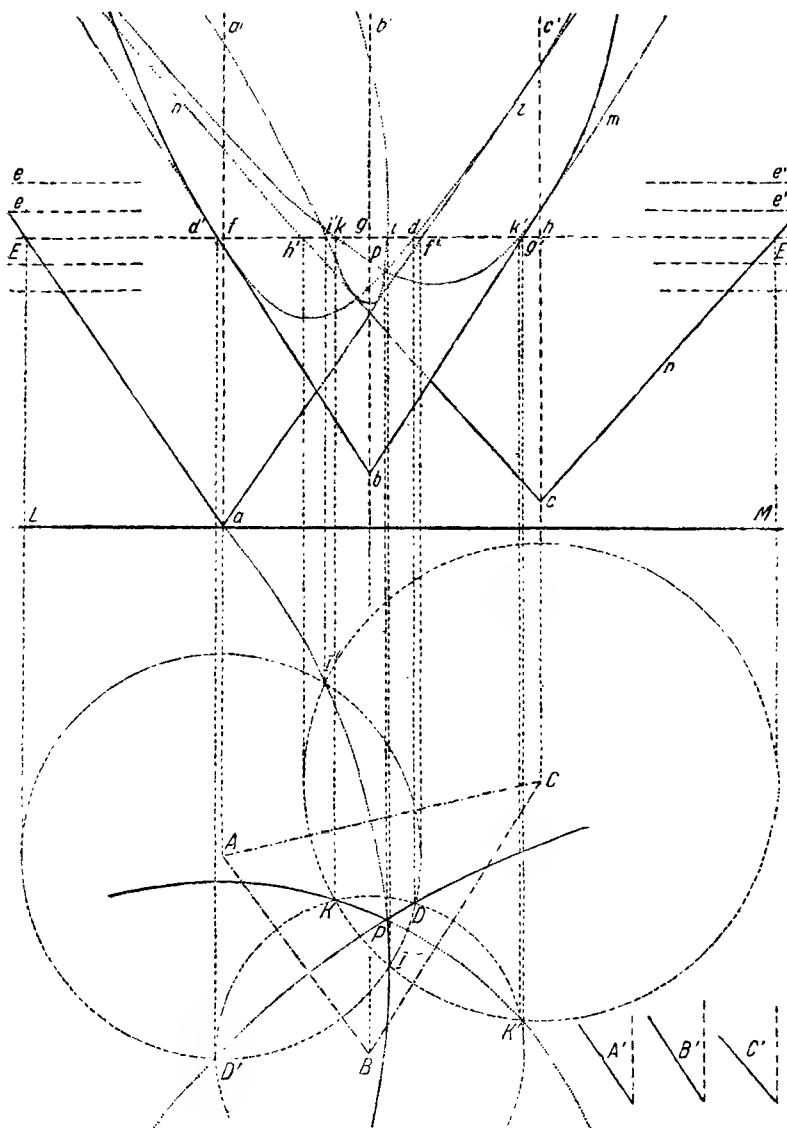
Из точек A, B, C , последовательно принимаемых за центры, радиусами, соответственно равными ff', gg' и hh' , опишем круги, окружности которых будут горизонтальными проекциями сечений трех конических поверхностей той же плоскостью EE' ; эти окружности пересекаются попарно в точках D, D', K, K', I, I' , которые будут проекциями такого же числа точек трех линий сечения конических поверхностей, рассматриваемых попарно; проектируя эти точки на EE' в d, d', k, k', i, i' , мы получим вертикальные проекции тех же точек трех линий пересечения.

Выполняя затем те же операции для прямых ee' , найдем для каждой из них новые точки D, D', K, K', I, I' в горизонтальной проекции и d, d', k, k', i, i' — в вертикальной проекции; после этого, через все точки $D, D', \dots$ проведем кривую DPD' , которая будет горизонтальной проекцией линии пересечения первой конической поверхности со второй; через все точки $K, K', \dots$ проведем другую кривую KPK' , которая будет горизонтальной проекцией линии пересечения второй и третьей поверхностей; и через все точки $I, I', \dots$ проведем третью кривую $IP I'$, которая будет проекцией линии пересечения третьей поверхности с первой. Точки $P, \dots$ и т. д., в которых все эти три кривые пересекаются, будут горизонтальными проекциями такого же числа точек, удовлетворяющих задаче.

Таким же образом проведем в вертикальной проекции через все точки $d, d', \dots$ первую кривую, через точки $k, k', \dots$ вторую и через точки $i, i', \dots$ — третью. Эти кривые будут вертикальными проекциями линий пересечения трех поверхностей, рассматриваемых попарно; и точки $p, \dots$, в которых пересекаются эти три кривые, будут вертикальными проекциями всех точек, удовлетворяющих условию задачи.

Проекции P, p одной и той же точки будут лежать на одном перпендикуляре к LM .

Выбрав из всех точек P ту, которая соответствует определяемому пункту, наблюдатель получит ее горизонтальную



Фиг. 41.

проекцию и, следовательно, положение на карте; затем, зная высоту соответственной точки относительно прямой LM , он получит возвышение определяемого пункта над наблюденной точкой A и, следовательно, найдет требуемую числовую отметку.⁴⁴

97. В этом решении мы строили проекции трех линий пересечения поверхностей, в то время как двух было бы достаточно. Но мы советуем всегда поступать так, потому что проекции двух кривых двойкой кривизны могут пересекаться в точках, не соответствующих точкам пересечения кривых, и для нахождения проекций точек пересечения надо проследить ветви двух кривых, относящихся к той же поле одной из поверхностей; это требует большого напряжения, чего можно избежать, строя три кривых; точки, в которых они все три пересекаются, будут действительными точками пересечения поверхностей.

98. Задача пятая. Условия задачи те же, что в предыдущем случае, с той только разницей, что инструмент не имеет отвеса и, таким образом, углы с направлением вертикальной линии не могут быть измерены; инженер должен, не покидая пункта наблюдения, определить его положение на карте и найти числовую отметку, соответствующую его положению, т. е. его возвышение над поверхностью уровня, к которому отнесены все точки карты.

Способ решения. Выбрав три точки местности, точно нанесенные на карту и не лежащие в одной плоскости с определяемым пунктом, инженер должен измерить три угла, составляемые визирными линиями на эти три точки, и сможет при помощи этого одного наблюдения разрешить задачу.

Действительно, если мы обозначим через A , B , C три наблюдаемые точки и предположим, что они соединены тремя прямыми AB , BC , CA , то мы будем иметь горизонтальные проекции этих прямых на карте; кроме того, из числовых отметок

трех точек мы получим разности высот концов этих прямых, следовательно, сможем определить величину каждой из них.

Рассмотрим в некоторой плоскости, проходящей через AB , прямоугольный треугольник BAD (фиг. 42), построенный на основании AB ; в этом треугольнике угол B есть дополнение угла, под которым наблюдается сторона AB , угол D равен наблюдаемому углу, и окружность круга, проходящая через точки A, B, D будет обладать тем свойством, что если из некоторой точки E на дуге ADB провести две прямые к точкам A и B , то угол при E , заключенный между ними, будет равен наблюдаемому углу. Если представить себе, что плоскость круга вращается вокруг AB как шарнира, — дуга ADB образует поверхность вращения, все точки которой будут обладать одним свойством; если из какой-нибудь точки на поверхности провести две прямые в точки A и B , эти прямые образуют между собой угол, равный наблюдаемому углу. Очевидно, что только точки этой поверхности вращения обладают этим свойством, следовательно поверхность пройдет через точку определяемого пункта. Если рассуждать подобным же образом для двух других прямых BC и CA , мы получим две другие поверхности вращения, на каждой из которых должна лежать точка определяемого пункта; эта точка будет лежать одновременно на трех разных поверхностях вращения, определенных по форме и положению; она будет, следовательно, их точкой пересечения. Таким образом, если мы построим горизонтальные и вертикальные проекции линий пересечения трех поверхностей, рассматриваемых попарно, точки, где все три проекции пересекутся, будут проекциями точки, удовлетворяющей условиям задачи. Горизонтальная проекция дает ее положение на карте, а вертикальная проекция дает возвышение этой точки над наблюдаемыми.⁴⁵

99. Если бы решать эту задачу аналитически, принимая за неизвестное* одну из трех координат вершины пирамиды,

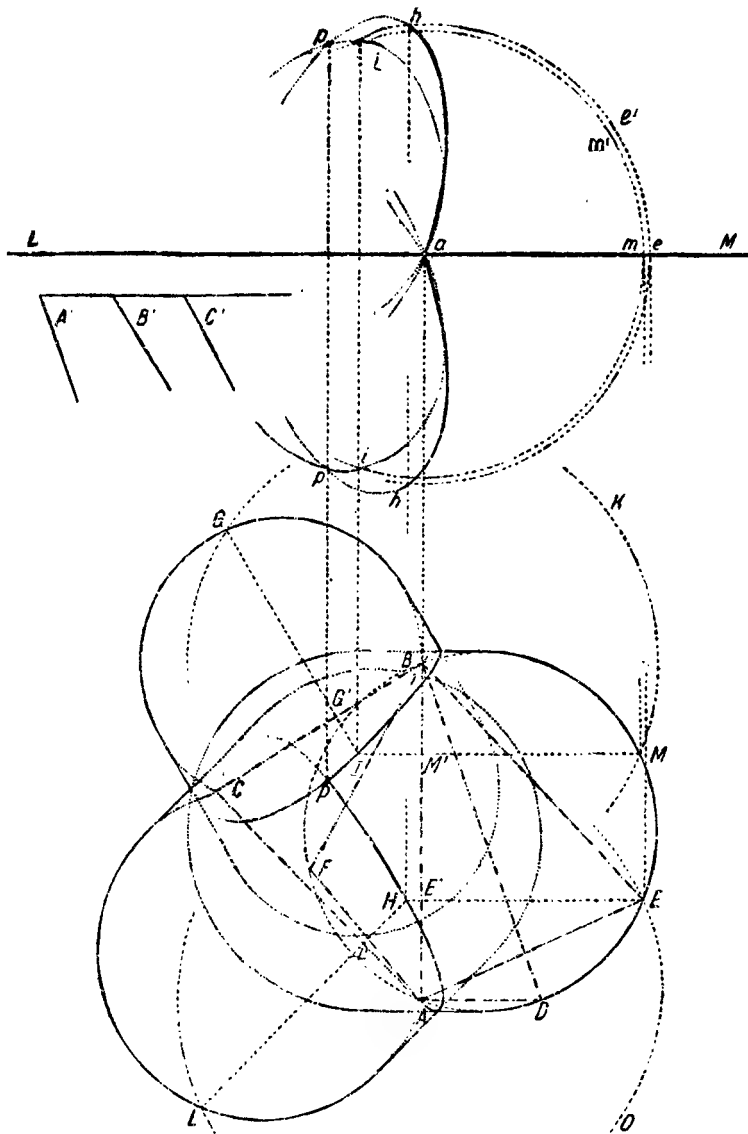
* Вместо того чтобы брать в качестве неизвестного одну из трех координат вершины, можно воспользоваться уравнениями, дающими значе-

окончательное уравнение было бы, вообще говоря, шестнадцатой степени, откуда следует, что три поверхности вращения могут пересекаться в шестнадцати точках; но эти точки не все удовлетворяют задаче. Действительно, если из некоторой точки F дуги AFB провести прямые к концам отрезка AB , угол AFB , заключенный между ними, не будет равен наблюдаемому углу, но будет его дополнением. Пола, образованная дугой AFB , и аналогичные ей полы в других поверхностях вращения не могут быть использованы для решения вопроса, и все точки пересечения, принадлежащие к некоторым из них, являясь точками, посторонними задаче.

При решении задачи при помощи начертательной геометрии мы должны исключить дугу AFB и аналогичные ей в других поверхностях; после этого, каждая из поверхностей будет иметь только одну полу; это сокращает число их точек пересечения, которые могли бы удовлетворить условиям задачи. Точки пересечения трех оставшихся пол помещаются попарно на прямых, перпендикулярных к плоскости, проходящей через три оси вращения, и равноудалены от этой плоскости.

Так как наблюдатель всегда знает, с какой стороны от этой плоскости находится искомая точка, он вообще не будет строить точек пересечения, лежащих по другую сторону. Наконец, он постарается выбрать из точек, расположенных с одной стороны от плоскости трех осей ту, которая расположена относительно точек A, B, C так же, как определяемый

ние трех ребер пирамиды в зависимости от трех сторон основания и косинусов противоположных углов между ребрами. Обозначая через a, b, c три стороны основания, p, q, r — косинусы углов между ребрами, противоположных этим сторонам, и x, y, z — три ребра, мы найдем для треугольника, образованного стороной a и ребрами x и y : $a^2 = x^2 + y^2 - 2xyp$, и подобным же образом: $b^2 = y^2 + z^2 - 2yzq$, $c^2 = z^2 + x^2 - 2x zr$, откуда найдем значение одного из ребер, напр. z , которое определится уравнением восьмой степени. Так как симметричная пирамида будет обладать ребром z такой же величины, каждое значение z будет соответствовать двум различным положениям вершины пирамиды.



Фиг. 42.

пункт относительно трех наблюдаемых точек в данной местности.*

100. Построение. Выберем положение плоскостей проекций таким образом, чтобы та, которую мы будем считать горизонтальной, проходила через три наблюдаемые точки, а другая была бы перпендикулярна прямой, проведенной через две из этих трех точек. Пусть ABC (фиг. 42) — треугольник, составленный тремя наблюдаемыми точками

* В издании 1847 г. предыдущий параграф (99) изложен в таком виде (Примеч. ред.):

99. Если решать эту задачу аналитически, она сведется, вообще говоря, к уравнению шестьдесят четвертой степени; каждая из поверхностей вращения имеет четыре полы, из которых две образованы дугой круга ADB , и две другие — дугой AFB . Так как каждая из пол первой поверхности может быть пересечена всеми полами второй, в кривой пересечения может образоваться шестнадцать ветвей; а так как эти шестнадцать ветвей могут быть пересечены четырьмя полами третьей поверхности, общее число точек пересечения трех поверхностей может достигнуть шестидесяти четырех; но эти точки не все удовлетворяют задаче. Действительно, если из некоторой точки F дуги AFB провести прямые к концам отрезка AB , угол AFB , заключенный между ними, не будет равен наблюдаемому углу, но будет его дополнением. Полы, образованные дугой AFB и аналогичные ей в других поверхностях вращения, ничего не дают для решения вопроса, и все точки пересечения, принадлежащие к некоторым из них, являются точками, посторонними задаче.

Решая задачу при помощи начертательной геометрии, мы можем и должны исключить дугу AFB и аналогичные ей в двух других поверхностях; каждая из этих поверхностей будет иметь теперь только две полы, и число их возможных точек пересечения сократится до восьми. Из этих восьми точек четыре лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через три оси вращения, и четыре по другую. Так как наблюдатель всегда знает, с какой стороны от этой плоскости он находится, он не будет строить точек пересечения, лежащих с другой стороны, и число точек, которые он может найти, сократится до четырех. Наконец, среди этих четырех точек — если они все существуют — он легко узнает ту, которая расположена относительно точек A , B , C так же, как определяемый пункт относительно трех наблюдаемых точек на местности.

и рассматриваемый в его собственной плоскости, и A', B', C' — измеренные углы. Проведем перпендикулярно стороне AB прямую LM , которая определит положение вертикальной плоскости проекций, и построим, как мы указали выше (§ 98), дуги образующих кругов $AEDB$, BGC , CLA трех поверхностей вращения, осями которых являются стороны AB , BC , AC . После этого опишем из точки A , как из центра, сколько угодно круговых дуг EOL , пересекающих в точках E , L те образующие, оси которых встречаются в A ; из них мы опустим на соответственные оси неопределенные перпендикуляры EE' , LL' ; эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке H , которая будет горизонтальной проекцией одной из точек пересечения двух поверхностей с осями AB и AC ; кривая AHP , проведенная через все точки $H, \dots$, найденные таким образом, будет горизонтальной проекцией этой линии сечения. После этого, спроектировав AB в точку a , мы из точки a , как из центра, радиусами, последовательно равными перпендикулярам EE' , опишем дуги круга $ee'h$, на каждый из которых мы будем проектировать точку H ; точки h , найденные таким образом, будут вертикальными проекциями точек пересечения тех же двух поверхностей вращения; кривая ahp , проведенная через все точки $h, \dots$, построенные таким образом, будет вертикальной проекцией линии пересечения.

Мы повторим те же операции для двух поверхностей вращения вокруг осей AB , BC , т. е. из точки B пересечения двух осей как из центра, опишем сколько угодно дуг круга MKG ; эти дуги пересекут образующие в точках M , G , из которых мы опустим на соответственные оси неопределенные перпендикуляры MM' , GG' ; эти перпендикуляры пересекутся в некоторой точке I , и кривая BIP , проведенная через все точки $I, \dots$, будет горизонтальной проекцией линии пересечения первой и третьей поверхностей вращения. Из точки a , как из центра, радиусами, последовательно равными перпендикулярам MM' , мы опишем дуги круга $mm'i$, на которые мы спроектируем точки I в соответственные точки i ; и кривая aip , проведенная через все

точки i , будет вертикальной проекцией той же линии пересечения.

Все точки $P...$, в которых пересекаются две кривые $АНР$ и $ВІР$, будут горизонтальными проекциями такого же числа точек, удовлетворяющих условиям задачи; а все точки $p...$, в которых пересекутся кривые ahr , air , будут вертикальными проекциями тех же точек.

Найденные таким образом проекции не дадут непосредственно ни положения определяемого пункта на карте, ни его высоты, потому что горизонтальная плоскость проекций не совпадает с плоскостью карты; но будет нетрудно отнести их к истинным плоскостям проекций.

101. Задача шестая. Генерал армии, стоящей перед лицом врага, не имеет карты местности, занимаемой последним; она ему нужна, чтобы составить план предпринимаемой атаки. В его распоряжении имеется аэростат. Он поручает инженеру подняться на аэростате и принять все необходимые меры к тому, чтобы составить карту и дать приближенную нивелировку; но он имеет основание думать, что если аэростат будет менять свои положения над местностью, враг догадается о его намерениях; поэтому он позволяет инженеру подниматься на разные высоты в атмосфере, если это нужно, но он не разрешает менять положение над землей. Инженер имеет угломерный инструмент, снабженный также и отвесом. Спрашивается, как он может исполнить приказание генерала?

Способ решения. Инженер произведет наблюдение в двух пунктах, расположенных на одной вертикальной линии, и определит расстояние между ними измерением длины каната, который будут травить, чтобы поднять его из одного пункта в другой. В одном из этих пунктов, предположим в нижнем, он измерит углы, составляемые вертикальной линией с визирными линиями, направленными в точки, положение которых он хочет определить на карте; затем из всех этих точек он выберет одну, которую будет считать первой и которую

мы назовем A , и измерит последовательно углы, образуемые визирной линией, направленной в точку A с направлениями на все остальные точки. В другом пункте наблюдения он измерит углы, составленные вертикальной линией с визирными линиями, направленными во все точки местности. На основании этих наблюдений он будет в состоянии построить требуемую карту.

Действительно, поскольку нам известны углы, образуемые с вертикальной линией двумя визирными линиями, направленными из двух пунктов наблюдения в ту же точку, мы можем сказать, что эта точка находится одновременно на двух конических поверхностях, вполне определенных и известных; эти поверхности имеют круговые основания; их оси лежат на той же вертикальной линии; расстояние между их вершинами равно разности высот обоих пунктов наблюдения, и углы, составляемые их образующими с их общей осью, равны наблюдаемым углам. Кроме того, поскольку мы знаем угол, образованный визирной линией, направленной в эту точку из первого пункта, и направлением на точку A , мы знаем, что рассматриваемая точка лежит на третьей конической поверхности с круговым основанием, наклонной осью которого будет визирная линия, направленная из первого пункта в точку A , вершина которого лежит в первом пункте, а угол, составляемый осью и образующей, равен наблюдаемому углу. Следовательно, рассматриваемая точка лежит одновременно на трех конических поверхностях* с круговым основанием, заданных по форме и положению; она будет находиться в их точке пересечения; построение горизонтальной и вертикальной проекции этого пересечения дает положение точки на карте и ее высоту относительно других точек.

* Две из этих поверхностей суть прямые конусы с круговым основанием, имеющие вершиной точку A и пересекающиеся по двум прямым. Можно определить одну точку на каждой из этих прямых, как пересечение двух кругов, рассматривая конусы, как поверхности вращения, оси которых пересекаются (§ 83).¹⁶

102. Не меняя общего хода рассуждений, можно упростить построение при помощи некоторых способов, изложенных нами выше; зная углы, измеренные в первом пункте, между визирной линией в точку *A* и всеми остальными и зная для каждого из этих углов углы, составляемые его сторонами с вертикальной линией, нетрудно привести их к горизонту, т. е. построить их горизонтальные проекции. Возьмем на карте произвольную точку, будем считать ее проекцией вертикали аэростата и проведем через эту точку произвольную прямую, которая должна представить собой проекцию визирной линии, направленной в точку *A*; наконец, проведем через ту же точку прямые, составляющие с проекцией визирной линии в точку *A* углы, равные углам, редуцированным к горизонту; очевидно, что каждая из этих прямых будет заключать в себе горизонтальную проекцию соответствующей ей точки местности. Останется только найти расстояние от этой точки до вертикали. Если в вертикальной проекции и на проекции вертикали аэростата взять две точки, которые в соответственном масштабе отстоят друг от друга на расстоянии, равном измеренной разности высот двух пунктов, и если через эти точки провести прямые, составляющие с вертикалью углы, равные наблюдаемым углам для одной и той же точки местности, — эти прямые пересекутся в точке, расстояние от которой до вертикали будет искомым расстоянием. Отложив это расстояние на соответствующей визирной линии от проекции положения аэростата, мы найдем на карте положение точки местности. Те же две прямые в их вертикальной проекции определяют своим пересечением высоту этой точки; снимая с вертикальной проекции высоты всех точек местности над одной общей горизонтальной плоскостью, мы определим числовые отметки для всех точек карты и, следовательно, получим нивелировку местности.

Это построение настолько простое, что не нуждается в чертеже.

Так как прямая, соединяющая проекцию вертикали аэростата с первой наблюдаемой точкой *A*, была сначала нанесена

произвольно на карте, карта не ориентирована; действительно, описанные нами наблюдения не содержат ничего, что позволило бы отнести положение точек к четырем главным точкам горизонта. Но если инженер измерит на земле угол, образуемый с меридианом визирной линией, направленной из основания вертикали в одну из точек, нанесенных на карте, и перенесет этот угол на свою проекцию, он найдет на ней направление меридиана, и карта будет ориентирована.⁴⁷

РАЗДЕЛ ПЯТЫЙ

О кривых плоских и двоякой кривизны, об их эволютах, эвольвентах и радиусах кривизны

103. Польза обучения начертательной геометрии в средней школе.

То, что мы до сих пор видели в начертательной геометрии, трактуемой абстрактно, содержит главнейшие методы, которые могут быть необходимыми в разных отраслях искусства.

Следовало бы установить, чтобы во всех сколько-нибудь значительных городах были открыты средние школы, где молодые люди двенадцати лет, собирающиеся посвятить себя искусству, упражнялись бы в продолжение двух лет в графических построениях и знакомились бы с главнейшими явлениями природы, знание которых им необходимо; такое обучение, развивая ум учеников, привычку и чувство точности, содействовало бы наиболее верным способом прогрессу отечественной промышленности, и, приучая их к правильной оценке вещей, навсегда гарантировало бы их от возможности заблуждений со стороны всяких самозванцев. Если бы мы ставили себе целью написать лишь элементарную книгу для обучения в этих средних школах, нужно было бы закончить на сказанном общие вопросы и перейти непосредственно к наиболее полезным и часто встречающимся применениям, но мы должны писать

не только для учеников средних школ, мы должны писать также и для их учителей.

В план народного образования должны быть включены только простые и полезные обиходные предметы; но если специалист хоть однажды в жизни встретится с затруднением, лежащим за пределами его школьных знаний, к кому обратится он за разрешением его, если не к своему учителю? И как сможет учитель разрешить это затруднение, если он сам не имеет более широких знаний, нежели те, что составляют обычный предмет занятия?

Чтобы дать учителям представление о некоторых общих геометрических свойствах тел, иногда применяемых в разных отраслях искусства, мы посвятим несколько лекций изучению кривизны кривых двойкой кривизны и поверхностей.

104. О кривизне и эвольвентах пространственных кривых.

Известно, что если прямая в плоскости вращается вокруг одной из своих точек, считаемой неподвижной, все другие точки этой прямой опишут вокруг неподвижной точки окружности концентрических кругов. Всякую кривую можно рассматривать как образованную аналогичным способом.

Пусть MNO (фиг. 43) какая-нибудь кривая на плоскости; если представить себе, что некоторая прямая AB движется, оставаясь постоянно касательной к кривой и не смещается в направлении длины, каждая точка P этой прямой опишет кривую $GPP'P''H$, которая будет, очевидно, обладать следующими свойствами.

Каждый элемент PQ описанной кривой будет перпендикулярен соответствующему направлению прямой AB ; ибо этот элемент имеет то же направление, какое имел бы в точке P элемент дуги круга, описанного из точки касания M , как из центра, радиусом, равным PM . Таким образом, касательная к описанной кривой в точке P будет перпендикулярна прямой,

105. В разных отраслях искусства [техники] * применяются некоторые эвольвенты, в особенности эвольвента круга, представляющая собой спираль, число оборотов которой бесконечно, и отдельные последовательные ветви находятся друг от друга на одинаковом расстоянии, равном окружности развернутого круга. По кривизне этой эвольвенты вырезаются кулаки вращающихся валов, которые поднимают молоты в камнедробилках, ибо, благодаря тому, что кулак лежит всегда в одной вертикальной плоскости с выступом молота, усилие вала при поднимании молота всегда постоянно. *Вокансон*⁴⁸ часто применял спиральные эвольвенты круга в сцеплениях для передачи движения от одного вращающегося вала другому, ему параллельному, в особенности в тех случаях, когда сцепление должно было работать возможно точнее и быстрее.

106. Мы показали (§ 104), каким образом эвольвента может быть построена по эволюте; легко понять также, каким образом эволюта в свою очередь может быть построена по эвольвенте. Действительно, мы видели, что все нормали эвольвенты касательны к эволюте. Если, следовательно, через все точки P, Q некоторой кривой $GPQP'$ провести нормали, — кривая MNO , которая касается всех нормалей, будет эволютой. Более того, если через две соседние и бесконечно близкие между собой точки P и Q провести две нормали PB и Qb , точка M , в которой они пересекутся, будет лежать на эволюте; эта точка может быть рассмотрена как центр бесконечно малой дуги круга, описанного радиусом PM , и потому обладающим той же кривизной, что и дуга PQ рассматриваемой кривой. Радиус круга PM , кривизна которого та же, что и кривизна бесконечно малой дуги кривой PQ , называется *радиусом кривизны* этой дуги; точка M , где пересекаются две соседние нормали, называется *центром кривизны*; эта кривизна известна, когда определено положение точки M .

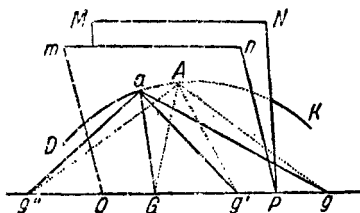
* Техники (прим. ред.).

107. До сих пор мы предполагали, что кривые — плоские, и рассматривали то, что происходит в их плоскости. Перейдем к кривым двоякой кривизны, подобным тем, которые образованы пересечением двух кривых поверхностей.

Если рассматривать прямую, проведенную через центр круга перпендикулярно к его плоскости и неопределенно продолженную в обе стороны, то, как известно, каждая точка на этой прямой будет находиться на равном расстоянии от всех точек окружности; следовательно, если мы вообразим, что вторая прямая, опирающаяся одним концом в одну из точек окружности и другим в некоторую точку на перпендикуляре, вращается вокруг него, как вокруг оси, составляя с ним все время один и тот же угол, то ее движущийся конец опишет окружность круга с такой же точностью, как она описывается радиусом из центра. Проведение круга при помощи радиуса есть только частный случай предыдущего способа и, благодаря своей простоте, дает более ясное представление о плоскости круга. Но если речь идет только об описании окружности, то первый способ может иногда иметь преимущество; так, если мы возьмем на оси два полюса, расположенные по разные стороны от плоскости, и, проведя через них две прямые, которые пересекутся в некоторой точке на окружности, будем вращать систему этих двух прямых вокруг оси таким образом, чтобы их точка пересечения не скользила по ним, то она опишет окружность круга без предварительного проведения плоскости, в которой он лежит.

108. Пусть $KAaD$ (фиг. 44) — какая угодно кривая двоякой кривизны, построенная в пространстве. Пусть через точку A этой кривой построена плоскость $MNOP$ перпендикулярно к касательной в точке A ; пусть через бесконечно близкую точку a построена подобным же образом плоскость $mnOP$, перпендикулярная к касательной в точке a ; эти две плоскости пересекутся по прямой OP , а прямая будет осью круга, дугой которого мы можем считать бесконечно малую

дугу Aa кривой; таким образом, если из точек A и a опустить перпендикуляры на эту прямую, они будут равны между собой и пересекут ее в одной и той же точке G , которая будет центром этого круга. Все другие точки $g, g', g'' \dots$ этой прямой будут лежать на равном расстоянии от всех точек бесконечно малой дуги Aa , и, следовательно, могут считаться ее полюсами. Так, если из любой точки g на этой оси провести две прямые в точки A, a , то отрезки gA, ga будут равны между собой и образуют с осью углы AgO, agO , равные между собой таким образом, для определения кривизны кривой в точке A и ее направления надо задать длину радиуса кривизны AG и указать положение точки G в пространстве. Но, если речь идет только о том, чтобы описать малую дугу, достаточно или повернуть прямую Ag вокруг оси, не изменяя угла AgO , или повернуть радиус кривизны AG перпендикулярно этой оси.

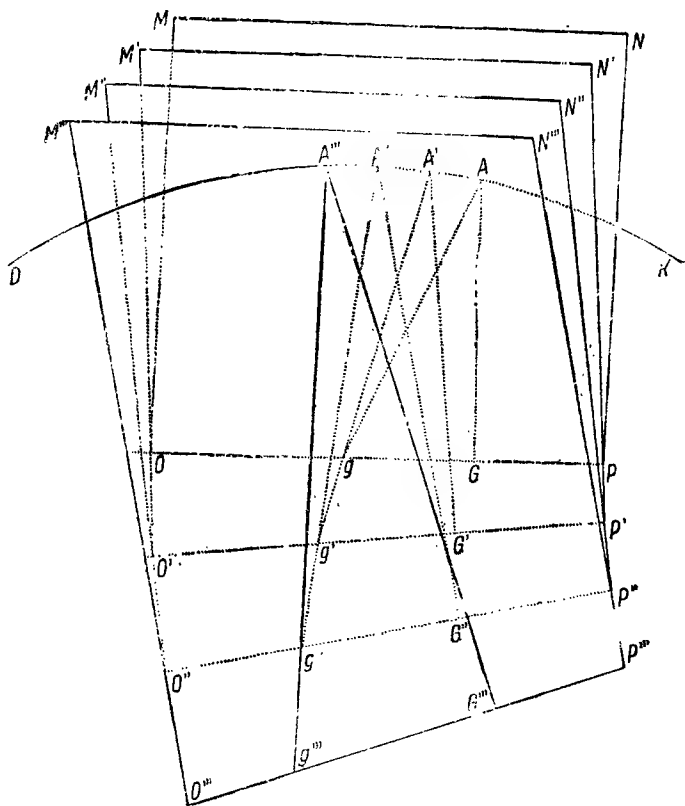


• Фиг. 44.

Итак, прямую OP можно рассматривать, как линию полюсов элемента Aa ; центр кривизны этого элемента есть центр его полюсов, расстояние которых до элемента *минимально*; наконец, его радиус кривизны¹ есть перпендикуляр AG , опущенный из элемента на линию полюсов.

109. Повторим (фиг. 45) для всех точек кривой двойкой кривизны ту же операцию, которую мы выполнили для одного из ее элементов, т. е. через все последовательные точки A, A', A'', A''' построим плоскости $MNOP$ перпендикулярные касательной в точке пересечения с кривой; первая из этих плоскостей пересечет вторую по прямой OP , которая будет геометрическим местом полюсов дуги AA' ; вторая плоскость пересечет третью по прямой $O'P'$ — геометрическому месту полюсов дуги $A'A''$ и т. д. Очевидно, что система всех прямых пересечения этих плоскостей или кривая

поверхность, которую составляет вся их совокупность, будет геометрическим местом полюсов кривой KAD , ибо эта кривая



Фиг. 45.

не будет иметь полюсов, которые не лежали бы на данной поверхности, и нет ни одной точки на ней, которая не была бы полюсом какого-нибудь элемента кривой.

О поверхности, являющейся геометрическим местом эволют кривой двойкой кривизны; замечательное свойство эволют, рассмотренных на этой поверхности. Образование любой кривой двойкой кривизны непрерывным движением

110. Прежде чем пойти далее, необходимо остановиться на некоторых свойствах поверхностей этого рода, независимо от того, какая кривая служила для их образования.

Эти поверхности могут быть развернуты на плоскости без разрывов и складок. Действительно, элементы $OPP' O'$, из которых состоит поверхность, представляют собой бесконечно узкие элементы плоскости, соединенные последовательно прямыми линиями. Поэтому всегда можно себе представить, что первый из этих элементов $OPP' O'$ вращается вокруг $O' P'$ как шарнира до совмещения с плоскостью следующего элемента $O' P' P'' O''$, что затем они оба вместе вращаются вокруг $O'' P''$ до совмещения с плоскостью третьего элемента и т. д. Отсюда видно, что ничто не мешает всем элементам поверхности разместиться без разрыва на одной плоскости.

Подобно тому как плоскости, нормальные к кривой KAD , образуют своими последовательными пересечениями кривую поверхность, к которой они касательны, прямые линии их пересечения в свою очередь пересекаются в точках, составляющих кривую двойкой кривизны, к которой все эти прямые касательны, ибо две соседние прямые являются пересечениями одной и той же нормальной плоскости с предшествующей и последующей ей. Следовательно, эти две прямые лежат в одной плоскости; поэтому они пересекаются в какой-нибудь точке, и последовательность всех этих точек пересечения образует на развертываемой поверхности некоторую замечательную кривую. Действительно, последовательные прямые после их пересечения на кривой, касающейся их всех, продолжают дальше и образуют своими продолжениями полу поверхности, отличную от полы, образованной отрезками тех же прямых до их пересечения. Эти две полы встречаются вдоль

кривой, которая является относительно всей поверхности истинным ребром возврата.⁴⁹

Действительно, пусть из точки A кривой (фиг. 45), через которую проходит первая нормальная плоскость $MNOP$, проведена в плоскости в произвольном направлении прямая Ag до ее встречи с сечением OP в некоторой точке g ; пусть через точки A', g проведена во второй нормальной плоскости прямая $A'g$, продолженная до встречи с сечением $O'P'$ в некоторой точке g' ; пусть таким же образом проведена $A''g'g''$ и т. д. Кривая, проходящая через все точки $g, g', g'', \dots$ и т. д., будет эволютной кривой KAD , ибо все прямые $Ag, A'g', A''g''$ — касательны в кривой $gg'g''$ как продолжения элементов этой кривой. Наконец, если мы представим себе, что первая прямая Ag вращается вокруг OP , как вокруг оси, до совмещения со следующей $A'g$, она не перестанет быть касательной к кривой $gg'g''$; и ее конец A , пробежав дугу AA' , совместится с концом второй прямой A' . И если вторая прямая $A'g$ вращается вокруг $O'P'$, как вокруг оси, до совмещения с третьей $A''g$, она также не перестанет касаться кривой $gg'g''$, и ее конец A' не выйдет за пределы дуги $A'A''$ и так далее. Следовательно, кривая $gg'g''$ такова, что если одна из ее касательных вращается вокруг нее, не переставая ее касаться и не смещаясь в направлении длины, то одна из точек этой касательной опишет кривую KAD ; следовательно, она будет одной из эволют этой кривой. Но направление первой прямой Ag было взято произвольно; если бы мы провели прямую в нормальной плоскости в любом другом направлении, то мы нашли бы другую кривую $gg'g''$, которая также была бы эволютой кривой KAD . Всякая кривая имеет бесконечное число эволют, лежащих на одной и той же кривой поверхности.

Прямые $A'g'$ и $A''g'$ образуют равные углы с прямой $O'P'$; в виду того, что элемент $g'g''$ является продолжением прямой $A'g'$, два соседних элемента gg' и $g'g''$ эволюты $gg'g''$ составляют равные углы с прямой $O'P'$, проходящей через

их точку пересечения. При разворачивании поверхности на плоскость элементы эволюты сохраняют те же углы с прямыми $O'P'$; поэтому два соседних элемента кривой $gg'g''$, рассматриваемых на развернутой поверхности, составляют равные углы с одной и той же прямой линией и являются продолжением один другого. Отсюда следует, что каждая эволюта кривой двойкой кривизны становится прямой линией, когда заключающая их поверхность развернута в плоскость; следовательно, она является на поверхности кратчайшей линией, которую можно провести между ее концами.

Отсюда вытекает простой способ построения любой эволюты кривой двойкой кривизны, если дана разворачиваемая поверхность, заключающая их. Для этого достаточно через точку на кривой протянуть нить касательно к поверхности и наложить эту нить на поверхность, натягивая ее, ибо, в силу натяжения, нить примет направление кратчайшего расстояния между концами кривой и уложится, следовательно, по одной из эволют.

111. Из изложенного понятно, как можно образовать непрерывным движением любую кривую двойкой кривизны: пусть мы имеем разворачиваемую поверхность, которой касаются все нормальные плоскости к кривой; если из некоторой заданной в пространстве точки, через которую должна пройти кривая, протянуть две нити, касательные к поверхности, и если, наложив их на поверхность и натянув, закрепить их свободные концы, то точка, где соединяются обе нити, будет обладать свойством двигаться вместе с плоскостью, касательной к поверхности, не скользя ни по одной нити, и образует при своем движении требуемую кривую.

112. Все, что было только что сказано о кривых двойкой кривизны, одинаково относится и к плоским кривым, с той только разницей, что поскольку все нормальные плоскости перпендикулярны к плоскости кривой, все последовательные

прямые их пересечения также будут перпендикулярны к плоскости кривой и, следовательно, параллельны между собой. Развертываемая поверхность, которой касаются все эти нормальные плоскости, будет в таком случае цилиндрической поверхностью, перпендикулярное сечение которой будет обычной эволютой кривой. Но эта цилиндрическая поверхность включает также все эволюты двоякой кривизны той же кривой; и каждая из этих эволют составляет со всеми прямолинейными образующими цилиндрической поверхности постоянные углы. Нарезка обычного винта представляет собою одну из эволют эвольвенты круга, служащего основанием цилиндрической поверхности, на которой она нанесена, и каков бы ни был ход оборота винта, если диаметр цилиндра неизменен, нарезка будет всегда одной из эволют той же кривой.

О кривых поверхностях. Доказательство теоремы:
„Каждая поверхность имеет в любой своей точке только две кривизны; каждая кривизна имеет свое собственное направление, свой собственный радиус, а две дуги, по которым эти кривизны измеряются, перпендикулярны друг другу на поверхности“

113. Изложив теорию кривых двоякой кривизны, займемся кривыми поверхностями. Характер этого вопроса таков, что его значительно легче изучать при помощи анализа, нежели простым рассмотрением геометрических свойств, но результаты, к которым он приводит, могут быть полезны различным специалистам, незнакомым с аналитическими операциями, а поэтому мы попытаемся их изложить исключительно на основании геометрических соображений. Этот метод внесет свойственную ему ясность, но он будет несколько длинным в изложении.

С точки зрения кривизны все поверхности могут быть разделены на три больших класса. Первый содержит такие, которые во всех своих точках не имеют никакой кривизны;

поверхности такого рода сводятся к плоскости, которая может быть как угодно расположена в пространстве. Второй класс включает все поверхности, имеющие в каждой данной точке одну единственную кривизну; эти поверхности, вообще говоря, развертываемые, у которых два соседних элемента могут считаться принадлежащими конической поверхности, даже если считать величину этих элементов неопределенной в направлении образующей конической поверхности. Наконец, все другие кривые поверхности составляют третий класс; они имеют в каждой точке две различные кривизны, которые могут изменяться независимо одна от другой. Рассмотрим сначала наиболее простые кривые поверхности и, прежде всего, цилиндрические.

114. Пусть $ABFE$ (фиг. 46) неопределенная цилиндрическая поверхность с каким угодно основанием, на которой мы рассматриваем произвольную точку L . Проведем через эту точку прямолинейную образующую CLG и сечение ILK плоскостью перпендикулярной образующей; это сечение будет параллельно и одинаково с основанием поверхности. Проведем через точку L нормаль LP к поверхности; эта нормаль будет перпендикулярна образующей CG и, следовательно, лежать в плоскости сечения ILK ; она будет также перпендикулярна к касательной к сечению в точке L ; или — что заключает сразу оба условия — она будет перпендикулярна к плоскости, касательной к поверхности в точке L . Возьмем на поверхности две другие точки, бесконечно близкие к точке L : точку M — на образующей CG и точку N на перпендикулярном сечении; если через каждую из этих точек провести новую нормаль к поверхности, то каждая из этих двух нормалей MQ и NP будет лежать в одной плоскости с первой нормалью LP ; однако эти плоскости будут различными для двух последних нормалей. Действительно, плоскость, касательная к поверхности в точке L , будет также касательна к ней и в M , и обе прямые LP и MQ будут перпендикулярными к одной

дыдущей и могла бы встретить ее хотя бы в бесконечности, если это необходимо, — это может быть осуществлено только двумя различными путями: 1) по направлению прямолинейной образующей поверхности, и тогда новая нормаль пересечется с первой в бесконечности, 2) в сечении, перпендикулярном к поверхности, когда новая нормаль встретится с первой в некоторой точке, расстояние которой зависит от кривизны основания в соответствующей точке; наконец, оба эти направления перпендикулярны между собой на поверхности.

Обе точки встречи трех нормалей являются единственными возможными *центрами кривизны* рассмотренного элемента поверхности; две различные плоскости, проходящие через первую нормаль и каждую из двух остальных, указывают направление каждой из кривизн; расстояния от точки на поверхности до двух точек пересечения нормалей суть *радиусы обеих кривизн*; мы видим, что поскольку в цилиндрических поверхностях один из этих радиусов всегда бесконечен, а величина другого зависит от формы основания поверхности, в каждой точке есть только одна конечная кривизна; другая всегда бесконечно мала или равна нулю.

Сказанное может быть легко применено ко всем развертываемым поверхностям, два соседних элемента которых, даже неопределенных в направлении прямолинейной образующей, могут всегда рассматриваться, как принадлежащие некоторой цилиндрической поверхности. Перейдем теперь к общему случаю любых кривых поверхностей.

117. Пусть $ABCD$ (фиг. 47) какая угодно кривая поверхность; мы рассматриваем на ней произвольную точку L , через которую проходит прямая FLf , касательная к поверхности; пусть положение этой прямой не определено и она может быть проведена как угодно в плоскости, касательной к поверхности в точке L . Затем представим себе, что прямая Ef движется, оставаясь все время параллельной самой себе и касательной к кривой поверхности; она образует при

эту точку, и предположим, что эта прямая движется, оставаясь всегда касательной к поверхности и перпендикулярной к плоскости того же меридиана; тогда точка касания линии с поверхностью пробежит по периферии меридиана, и прямая образует цилиндрическую поверхность, которая будет касаться поверхности вращения по самой периферии меридиана и, следовательно, по плоской кривой.

120. Во всех других случаях цилиндрическая поверхность, описанная вокруг какой-либо поверхности, касается по ее кривой $LCKAL$ двойкой кривизны.

Так как прямая FLf была взята произвольно в плоскости, касательной к поверхности в точке L , то касательная LU , проведенная через точку L к кривой касания $LCKAL$, составляет с прямолинейной образующей FLf угол FLU , который будет зависеть от формы кривой поверхности и от произвольного направления, приданного прямой FLf . Допустим, что всегда возможно в каждом частном случае, что направление прямой FLf изменяется, но при этом оно не перестает быть касательной к поверхности в точке L , и в своем новом направлении она движется параллельно самой себе, всегда оставаясь касательной к поверхности; она образует при своем движении другую цилиндрическую поверхность, описанную вокруг заданной поверхности, которая будет касаться ее по некоторой другой кривой двойкой кривизны; эта новая кривая касания также пройдет через точку L , и ее касательная в этой точке составит с новым направлением прямолинейной образующей угол, отличный от первого угла FLU . Допустим, наконец, что мы изменяем направление прямолинейной образующей до тех пор, пока образованная ею цилиндрическая поверхность не коснется заданной поверхности по кривой, касательная к которой в точке L будет перпендикулярна к образующей.

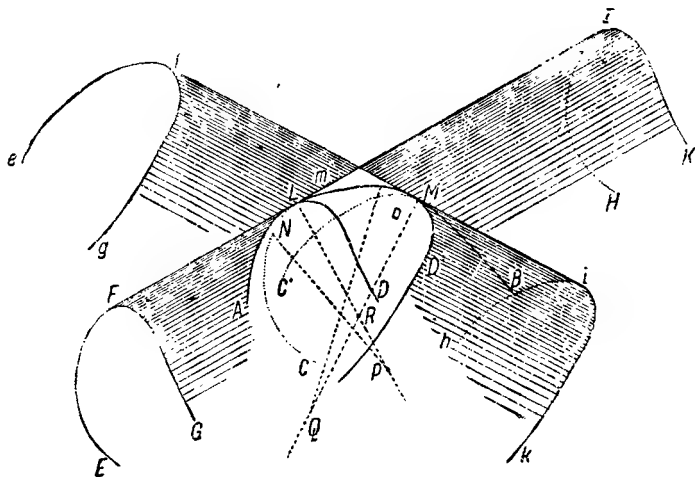
Рассмотрим некоторую точку L на кривой поверхности (фиг. 48); пусть FLI — прямая, касательная к поверхности

в точке L , направление которой выбрано так, что при ее движении параллельно самой себе она не перестает касаться поверхности; эта прямая образует цилиндрическую поверхность $EFGHIK$, касающуюся заданной поверхности по кривой, касательная к которой в точке L перпендикулярна FLI . Линия касания цилиндрической поверхности с заданной поверхностью будет кривой двойкой кривизны; но в точке L ее элемент совпадет с элементом LN сечения $CNLD$ цилиндрической поверхности плоскостью, перпендикулярной к прямой FLI . Так как оба конца этого элемента L и N лежат на линии касания, то они лежат одновременно на обеих поверхностях; и если через эти точки L и N провести две нормали LP и NP к цилиндрической поверхности, то они будут также нормальными к кривой. Но эти две нормали лежат в одной плоскости, перпендикулярной к образующей цилиндрической поверхности, и должны пересечься в некоторой точке P — центре кривизны дуги LN ; следовательно, если на какой-нибудь кривой поверхности взять две точки L и N , лежащие на ее линии касания с цилиндрической поверхностью, прямая FLI образующая которой перпендикулярна к элементу LM этой линии касания, то нормали к кривой поверхности, проведенные через эти две точки, будут лежать в одной плоскости и встретятся в точке, которая будет центром кривизны поверхности в направлении плоскости, заключающей обе нормали.

121. Если на прямой FLI взять точку m , бесконечно близкую к L , и провести через нее нормаль к цилиндрической поверхности, то она будет параллельна LP и не будет нормалью к заданной кривой поверхности.

Представим себе, что прямая FLI движется в плоскости кривой $ALMB$, определенной прямыми FLI и LP , не переставая касаться поверхности, и принимает бесконечно близкое положение fi , касаясь при этом поверхности в точке M , бесконечно близкой к L ; если вообразить, что эта прямая fMi

движется параллельно самой себе, все время касаясь поверхности, она образует новую цилиндрическую поверхность $efghik$, бесконечно мало отличающуюся от первой как по форме, так и по положению, и линия касания этой новой цилиндрической поверхности пройдет через точку M . Нормаль MQ к этой цилиндрической поверхности в точке M будет также нормалью



Фиг. 48.

к заданной кривой поверхности; она будет находиться в одной плоскости с первой нормалью LP , ибо обе они будут находиться в плоскости, заданной прямыми FLI и fMi ; эта плоскость будет перпендикулярна той, которая проходит через нормали LP , NP . Обе нормали LP и MQ пересекутся в некоторой точке R , которая будет центром кривизны дуги LM , и, следовательно, центром кривизны поверхности в направлении плоскости, проходящей через прямые FLI , fMi .

Мы видим, следовательно, что, если через некоторую точку L на любой кривой поверхности провести к ней нормаль, всегда можно перейти по двум различным направлениям к другой точке M или N , новая нормаль в которой будет

находиться в одной плоскости с первой, и что если эти оба направления лежат в нормальных плоскостях, перпендикулярных между собой, они одновременно перпендикулярны друг другу на кривой поверхности.

122. Действительно, эти два направления являются, вообще говоря, единственными, для которых вышеизложенное имеет место, т. е., если на кривой поверхности перейти в любом другом направлении в некоторую точку O , бесконечно близкую к L , и провести в ней нормаль OQ к поверхности, то эта последняя не будет лежать в одной плоскости с нормалью LP и, следовательно, с ней не пересечется.

Предположим, что вторая цилиндрическая поверхность наложена таким образом, что ее линия касания с поверхностью проходит через точку O ; дуга OM этой линии касания совпадает с дугой сечения $C'OMD'$, перпендикулярного к цилиндрической поверхности; нормали к заданной поверхности в точках O и M будут также нормальными к цилиндрической поверхности; они будут находиться в плоскости перпендикулярного сечения и пересекутся в некоторой точке Q , но нормаль OQ не пересечется с нормалью LP , ибо, для того чтобы эти обе нормали могли пересечься, необходимо, чтобы точка Q на нормали OQ совпадала с точкой R , в которой эта нормаль встречается с LP ; а это, вообще говоря, не имеет места, так как предполагает равенство кривизн двух дуг LM и LN и справедливо только для немногих точек некоторых кривых поверхностей.

Например, поскольку кривизна поверхности шара везде одинакова в каком бы направлении мы ни переходили из одной его точки в другую, бесконечно близкую, — нормали, проведенные через эти две точки, будут всегда лежать в одной плоскости; шаровая поверхность — единственная, все точки которой обладают указанным свойством. У поверхностей вращения с криволинейной образующей, пересекающей ось перпендикулярно, кривизна в вершине тоже одинакова во всех направ-

лениях, и две соседних нормали всегда лежат в одной плоскости; но это свойство имеет место только для вершины. Наконец, существуют кривые поверхности, где этим свойством обладает совокупность точек, составляющих определенную кривую на поверхности, но это справедливо только для точек этой кривой; для всех же других точек поверхности новая нормаль не может пересечь первую, если только точка на поверхности, через которую она проходит, не взята на одном из определенных нами направлений.

123. Отсюда следует, что, вообще говоря, любая поверхность имеет в каждой из своих точек только две кривизны, что каждая кривизна имеет свой собственный центр, свой собственный радиус и что две дуги, которым соответствуют эти две кривизны, составляют между собой прямые углы на поверхности. Частные случаи, как шар и вершины поверхностей вращения, где две любые соседние нормали пересекаются, не являются исключениями из этой теоремы. Только в этих случаях обе кривизны равны между собой, и направления, по которым они оцениваются, безразличны.

124. Хотя две кривизны одной поверхности связаны между собой законом ее образования, они могут изменяться при переходе из одной точки поверхности в другую, как в одинаковом, так и в обратном направлениях. Мы не можем входить в детали по этому вопросу — что было бы значительно легче при помощи анализа, — мы ограничимся замечанием, что у некоторых поверхностей, таких, как сфероиды, обе кривизны в каждой точке имеют одинаковое направление, т. е. поверхности повернуты выпуклостью в одну сторону; у некоторых других поверхностей в определенных точках обе кривизны направлены в противоположные стороны, т. е. одна направлена выпуклостью, другая вогнутостью в ту же сторону (случай поверхности желобка блока); есть также такие поверхности, у которых во всех точках обе кривизны име-

ют противоположные направления (поверхность, образованная движением прямой линии, подчиненной условию пересекать три другие прямые, произвольно заданные в пространстве), и, наконец, в одном частном случае обе противоположные кривизны в каждой точке равны между собой. Площадь такой поверхности минимальна.⁵⁰

О линиях кривизны любой поверхности, о ее центрах кривизны и о поверхности, являющейся их геометрическим местом. Применение к делению сводов на клинчатые камни и к искусству гравирования

125. Перейдем теперь к некоторым следствиям, вытекающим из двойкой кривизны кривых поверхностей, знание которых необходимо специалистам.

На фиг. 49 изображена часть некоторой кривой поверхности, через произвольную точку L которой проведена к ней нормаль. Мы видели, что из точки L можно перейти по двум направлениям в другую точку M или L' , нормаль в которой пересечет первую нормаль, и что оба эти направления перпендикулярны друг другу на поверхности. Пусть эти взаимноперпендикулярные направления будут LM и LL' . Из точки M в свою очередь можно перейти по двум различным направлениям в другую точку N или M' , нормаль в которой встретится с нормалью, проходящей через M ; пусть эти два взаимноперпендикулярных направления, проходящих через точку M , будут MN и MM' . Поступая таким же образом для точки N , найдем два направления NO и NN' , пересекающиеся под прямым углом в точке N ; для точки O мы получим направления OP и OO' и так далее. Совокупность точек $L, M, N, O, P, \dots$ и т. д., в которых соседние нормали лежат в одной плоскости, образует на поверхности кривую линию, которая всегда будет указывать направление одной из двух кривизн поверхности; эта кривая будет линией первой кривизны, проходящей через точку L . Поступая для точки L' таким же

образом, как для точки L , перейдем сначала по двум взаимно перпендикулярным направлениям в новую точку M' или L'' , новая нормаль в которой пересечется с нормалью в L' , и аналогично найдем новую совокупность точек $L', M', N', O', P', \dots$ и т. д., образующих на поверхности другую линию первой кривизны, которая пройдет через точку L' . Поступая таким же образом для последовательности точек $L'', L''', L^{IV}, \dots$, найденных, как L', L'' , мы найдем новые линии первой кривизны $L''M'N'O'P', L'''M''N'''O''P''$ и т. д., которые пройдут через соответственные точки $L'', L''', L^{IV}, \dots$ и т. д. и разделят кривую поверхность на зоны. Но совокупность точек $L, L', L'', L''', \dots$, две соседние нормали в которых также лежат в одной плоскости, образует на кривой поверхности другую кривую, которая будет всегда указывать направление второй кривизны поверхности; эта кривая будет линией второй кривизны; совокупность M, M', M'', M''' образует другую линию второй кривизны, проходящую через точку M , и точки N, N', N'', N''' — третью линию второй кривизны, проходящую через точку N , и т. д.; все эти линии второй кривизны разделят поверхность на другие зоны. Наконец, все линии первой кривизны пересекут под прямыми углами все линии второй кривизны, и эти две системы линий кривизны разделят поверхность на прямоугольные элементы; это будет иметь место не только в случае бесконечно близких линий, как мы предположили, но даже и тогда, когда линии одной системы находятся на конечном расстоянии одна от другой. Прежде чем идти дальше, мы приведем пример, нам хорошо знакомый.⁵¹

126. Если пересечь какую-нибудь поверхность вращения рядом плоскостей, проходящих через ось, мы получим ряд линий пересечения, которые будут линиями одной из кривизн поверхности; ибо, для того чтобы какая-нибудь кривая была линией кривизны поверхности, необходимо, чтобы в каждой точке прямолинейная образующая элемента цилиндрической поверхности, касательной к поверхности по элементу кривой,

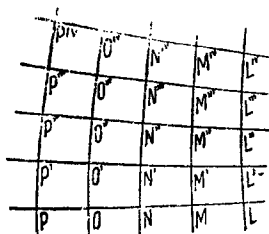
была перпендикулярна кривой; но это условие, очевидно, соблюдается здесь не только в каждой точке кривой для элемента одной цилиндрической поверхности, чего было бы достаточно, но и для всей кривой к одной и той же цилиндрической поверхности. Более того, если пересечь ту же поверхность вращения рядом плоскостей, перпендикулярных к оси, мы получим второй ряд сечений, которые будут все круговыми и линиями другой кривизны; ибо если через какую угодно точку на одном из этих сечений провести касательную к меридиану поверхности и предположить, что эта касательная движется параллельно самой себе, образуя цилиндрическую поверхность, касательную к поверхности вращения, элемент этой цилиндрической поверхности коснется поверхности вращения по дуге круга, которая будет перпендикулярна прямолинейной образующей. Итак, для любой поверхности вращения линии кривизны будут для одной кривизны меридианами поверхности, а для другой кривизны — параллелями; очевидно, что эти две совокупности кривых пересекаются на поверхности под прямыми углами.

127. Если через все точки линии кривизны $LMNOP$ (фиг. 49) кривой поверхности провести нормали к ней, вторая нормаль, как мы видели, встретит первую в некоторой точке, третья встретит вторую в другой точке и т. д.; совокупность этих нормалей, из которых две соседние всегда лежат в одной плоскости, образует разворачиваемую поверхность, везде перпендикулярную к заданной кривой поверхности и пересекающую ее вдоль линии кривизны.

Поскольку эта линия кривизны сама везде перпендикулярна к нормалям, составляющим разворачиваемую поверхность, она будет также линией кривизны этой последней поверхности. Ребро возврата разворачиваемой поверхности, образованное совокупностью точек пересечения соседних нормалей, к которому все нормали касательны, является одной из эволют кривой $LMNOP$; она является геометрическим местом центров кри-

визны всех точек этой кривой и в то же время геометрическим местом центров первой из кривизн поверхности для всех точек, лежащих на линии $LMNOP$. Если провести то же рассуждение для всех других линий кривизны той же совокупности как $L'M'N'O'P'$, $L''M''N''O''P''...$ и т. д., то мы можем считать, что нормали к кривой поверхности образуют совокупность развертываемых поверхностей, перпендикулярных к заданной поверхности, и система ребер возврата всех развертываемых поверхностей образует кривую поверхность, которая будет геометрическим местом центров одной из кривизн заданной поверхности.

То, что мы установили для одной из кривизн поверхности, равно справедливо и для другой. Действительно, если через все точки $L, L', L'', L''',...$ и т. д. одной из линий другой кривизны провести нормали к поверхности, то эти последовательные прямые будут парно лежать в одной плоскости; их система образует развертываемую поверхность, которая будет везде перпендикулярна к заданной поверхности и пересечет ее по линии кривизны $LL'L''L''',...$; эта последняя будет сама линией кривизны развертываемой поверхности. Ребро возврата этой последней поверхности будет геометрическим местом центров кривизны линий $LL'L''L'''$ и одновременно геометрическим местом центров второй кривизны заданной поверхности для всех точек линии $LL'L''L'''...$ То же самое будет иметь место для нормалей, проведенных через точки других линий кривизны $MM'M''M'''...$, $NN'N''N'''...$ Таким образом, можно опять считать, что все нормали к кривой поверхности составляют вторую совокупность развертываемых поверхностей, перпендикулярных к заданной, и система ребер возврата всех этих новых развертываемых поверхностей образует вторую кривую поверхность, которая будет геометрическим местом центров второй кривизны поверхности.



Фиг. 49.

128. В некоторых частных случаях поверхности центров двух кривизн одной и той же заданной поверхности отличны друг от друга, т. е. они могут быть образованы независимо, и каждой из них соответствует свое уравнение. Примером являются поверхности вращения, для которых одна из этих поверхностей сводится к самой оси вращения, а другая есть тоже поверхность вращения, образованная вращением плоской эволюты меридиана вокруг той же оси. Но чаще всего, и в общем случае, эти две поверхности не отличны и не могут быть образованы отдельно; они имеют одно уравнение и являются двумя различными полами одной и той же кривой поверхности.

129. Мы видим, что все нормали кривой поверхности могут быть рассмотрены как линии пересечения двух совокупностей развертываемых поверхностей, из которых каждая перпендикулярна к заданной поверхности и пересекает ее по кривой, являющейся одновременно линией кривизны заданной кривой поверхности и развертываемой поверхности, и что каждая из развертываемых поверхностей первой совокупности пересекает все поверхности второй по прямым линиям и под прямыми углами.⁵²

130. Приведем несколько примеров применения этих общих соображений в некоторых областях искусства. Первый пример возьмем из архитектуры.

Своды, построенные из обтесанных камней, состояются из отдельных, так называемых клинчатых камней. Каждый клинчатый камень имеет несколько граней, выполнение которых требует очень большого внимания. 1) Лицевая грань, которая составит часть видимой поверхности свода и должна быть обтесана с величайшей точностью, называется *выгибом свода*. 2) Грани, которыми соприкасаются соседние клинчатые камни, называются обычно *гранями соприкосновения*. Грани соприкосновения должны быть также выполнены с очень

высокой точностью; так как давление передается от одного клинчатого камня к другому перпендикулярно к поверхности грани соприкосновения, необходимо, чтобы оба камня касались друг друга возможно большим числом точек, для того чтобы давление в каждой точке соприкосновения было наименьшим и распределялось равномерно. Следовательно, необходимо, чтобы грани соприкосновения каждого клинчатого камня были выточены как можно ближе к истинной поверхности, часть которой они должны составлять; для выполнения этого условия надо, чтобы характер граней соприкосновения был как можно проще и чтобы их можно было выточить возможно точнее. Для этой цели обычно делают плоские грани; но это допустимо не при всякой поверхности свода; в некоторых случаях принятые условия архитектуры, о которых мы будем говорить ниже, были бы грубо нарушены, если бы клинчатые камни соприкасались не по кривым поверхностям. В этом случае необходимо выбирать из всех кривых поверхностей такие, которые могут удовлетворять другим требуемым условиям, образование которых наиболее просто и изготовление допускает наибольшую точность. Но из всех кривых поверхностей наиболее просто изготавливаются те, которые образованы движением прямой линии и, в особенности, развертываемые поверхности; итак, если нужно, чтобы грани соприкосновения клинчатых камней имели кривые поверхности, их составляют по возможности из развертываемых поверхностей.

Одно из главных условий, которому должна удовлетворять форма граней соприкосновения клинчатых камней, — это повсеместная перпендикулярность к поверхности свода, составляемого этими камнями; ибо если бы два угла, составляемые одной и той же гранью соприкосновения с поверхностью свода, были существенно различны, то тот из них, который больше прямого угла, был бы способен к большему сопротивлению, чем другой; и под взаимодействием двух соседних клинчатых камней друг на друга острый угол мог бы дать трещину, что по меньшей мере деформировало бы

свод и могло бы даже отразиться на его прочности и сократить долговечность здания. Но если поверхность грани соприкосновения должна быть кривой, ее целесообразно выбрать такую, которая образована прямой, везде перпендикулярной к поверхности свода; и, если желательно, кроме того, чтобы поверхность грани соприкосновения была развертываемой, надо, чтобы все последовательные нормали к поверхности свода, так сказать составляющие грань соприкосновения, находились попарно в одной и той же плоскости. Но мы видели, что это условие может быть соблюдено только в том случае, если все нормали проходят через одну и ту же линию кривизны поверхности свода; следовательно, если поверхности граней соприкосновения клинчатых камней должны быть развертываемыми, необходимо, чтобы они пересекали поверхность свода по его линиям кривизны.

Впрочем, как точно ни были бы выточены клинчатые камни, их разделение на поверхности свода всегда заметно, их швы образуют очень заметные линии, которые должны быть подчинены общим законам и удовлетворять частным условиям в зависимости от характера поверхности свода. Среди общих законов одни относятся к прочности, другие к долговечности здания; к этому числу относится и правило, предписывающее перпендикулярность граней соприкосновения одного и того же клинчатого камня в силу требования, что они должны быть сами перпендикулярны к поверхности свода. Швы между клинчатыми камнями должны быть таковы, что те из них, которые разделяют свод на ряды, должны быть все перпендикулярны к линиям, разделяющим тот же ряд на отдельные камни. Что касается частных условий, их может быть очень много, и не наша задача здесь их перечислять, но есть одно главное: швы между клинчатыми камнями, которые, как мы видели, бывают двух родов, должны быть взаимно перпендикулярны и соответствовать характеру поверхности, к которой они принадлежат. Но на кривой поверхности не существует линии, удовлетворяющей одновременно всем

этим условиям, кроме двух совокупностей линий кривизны. Таким образом, разделение свода на клинчатые камни всегда должно быть сделано по линиям кривизны его поверхности, и грани соприкосновения должны быть частями развертываемых поверхностей, образованных совокупностью нормалей к поверхности, из которых каждые две соседние лежат попарно в одной плоскости; следовательно, в каждом клинчатом камне поверхности четырех граней соприкосновения должны составить прямые углы с поверхностью свода.⁵³

До открытия геометрических соображений, на которых основано все только что сказанное, архитекторы имели лишь смутное представление о тех законах, которыми руководствовались в своей практике. Так, в случае когда поверхность свода была поверхностью вращения, например, сфероидом, — они разделяли клинчатые камни меридианами и параллелями, т. е. линиями кривизны поверхности свода.

Грани соприкосновения, соответствующие меридианам, были плоскостями, проведенными через ось вращения; грани, соответствующие параллелям, были коническими поверхностями вращения вокруг той же оси; и эти два рода граней были перпендикулярны между собой и к поверхности свода. Но в случае поверхностей более сложного происхождения, и когда их линии кривизны не были столь хорошо выражены, как, например, в сводах в виде вытянутых сфероидов и во многих других, архитекторы не были в состоянии удовлетворить всем требованиям и жертвовали в каждом данном случае тем из них, которое представляло наибольшие трудности.

Поэтому было бы желательно, чтобы в каждой школе начертательной геометрии, организованной в провинции, преподаватели излагали определение и построение линий кривизны встречаемых поверхностей, чтобы художники, которые не могут уделять много времени подобным исследованиям, могли с ними консультироваться и пользоваться их результатами.

131. Второй пример, который мы приведем, возьмем из искусства гравирования.

В гравюре оттенки различных частей поверхности изображаемых объектов осуществляются при помощи штриховки тем более частой и сильной, чем темнее должен быть оттенок.

Если гравюра предназначена для рассматривания на расстоянии достаточно большом, чтобы отдельные штрихи не были заметны, род штриховки более или менее безразличен, и каковы бы ни были контуры штрихов, гравер может всегда их усилить и увеличить их число, чтобы получить желаемый оттенок и вызвать соответственное впечатление. Но если — и это обычно имеет место — гравюра должна быть рассматриваема достаточно близко, когда контуры штриховки становятся заметными, форма их уже не безразлична. Для каждого объекта и для каждой части его поверхности можно подобрать контуры штриховки, лучше всего передающие кривизну поверхности; этих особых контуров всегда бывает два, и граверы иногда применяют оба сразу, когда для усиления оттенка они делают штриховку перекрестной. Эти контуры, о которых художники еще только смутно догадываются, суть проекции линий кривизны поверхности, которую хотят изобразить. Так как поверхности большинства предметов не могут быть подведены под точное определение, их линии кривизны нельзя определить ни вычислением, ни графическим построением. Но если бы художники с молодых лет упражнялись в нахождении линий кривизны большого числа различных поверхностей, которые могут быть точно заданы, они лучше понимали бы форму и положение этих линий, даже в случае более сложных фигур; они схватывали бы их с большей точностью, и их работы были бы более выразительными.⁵⁴

Мы не будем настаивать на этой стороне дела, представляющей может быть наименьшее из преимуществ, которые принесла бы искусству и промышленности организация школ начертательной геометрии в каждом большом городе Франции.⁵⁵

Г. МОНЖ-М. БРИССОН



ТЕОРИЯ ТЕНЕЙ
И
ПЕРСПЕКТИВЫ





ТЕОРИЯ ТЕНЕЙ⁵⁶



О пользе теней, нанесенных на этюрах

132. После изложения общих принципов, при помощи которых решаются различные задачи начертательной геометрии,⁵⁷ полезно обратиться к некоторым ее приложениям. Прежде всего мы займемся определением теней на чертежах и затем перейдем к перспективе.

Было бы хорошо, если бы в школах, предназначенных для распространения методов начертательной геометрии, ученики начинали изучение их практических приложений с разрезки камней и дерева. Этот род исследований требует точного выполнения эюр и тем самым приучает ум и руку ученика к точной работе; задачи, здесь возникающие, более разнообразны и развивают сообразительность. Однако в курсе, специально посвященном начертательной геометрии, естественно рассмотреть в качестве первого приложения теорию теней, которую должно рассматривать как дополнение этой науки.

Было сказано, что начертательную геометрию следует рассматривать с двух точек зрения. С одной из них она представляется как метод исследования для достижения требуемых точных результатов; в таком смысле она применяется в разрезке камней и дерева. С другой точки зрения, начертательная геометрия — только метод представления предметов,

и в этом случае определение теней является для нее существенным дополнением.

Люди, сведущие в методах этой науки, знают, что для изображения предмета недостаточно одной проекции; их всегда надо иметь две, ибо в плоскости неизбежно недостает одного измерения, тогда как в двух проекциях три измерения вполне определены. Рассматривая изображение предмета, выполненное при помощи двух его проекций, надо сравнивать горизонтальную проекцию с вертикальной и из этого постоянного сравнения составлять себе представление о форме изображаемого предмета.

Хотя метод проекций⁵⁸ и прост и не лишен своего рода изящества, эта необходимость непрестанного сравнения двух проекций утомительна, и задача может быть упрощена изображением теней.

Действительно, предположим, что мы имеем некоторую горизонтальную проекцию, дающую все размеры в длину и ширину и ничем не определяющую размеров в высоту; если допустить, что тела освещены определенным образом (надлежит выбирать именно наиболее естественный и привычный род освещения), например, параллельными лучами света, то они будут отбрасывать тени друг на друга и на горизонтальную плоскость, над которой они расположены; размеры и формы теней позволят сделать непосредственные заключения о вертикальных размерах тел. Таким образом, если направление световых лучей известно, вторая проекция не нужна; одна проекция с изображением теней даст полное представление о рассматриваемом предмете; если же мы имеем проекции как вертикальную, так и горизонтальную с построенными тенями, то эти две проекции будут более легкими для чтения и дадут лучшее представление о предмете, нежели одни проекции без теней.

Итак, во всех отраслях искусства, где речь идет об изображении предметов, и начертательная геометрия применяется не как метод исследования, а как метод изображения, опре-

деление теней создает преимущество и делает изображение более совершенным.

Определение теней заключает две отдельные части: одна представляет построение контуров теней, другая заключается в нахождении интенсивности оттенков, которые должны быть приданы каждой части затененных поверхностей.

Мы займемся сначала первой частью, той, которая относится к построению теней.

О построении теней

133. Теория теней целиком основана на всем известном явлении, что свет распространяется прямолинейно. Мы настолько привыкли к этому представлению, что всякий раз, когда хотим проверить — является ли некоторая линия прямой, то сравниваем ее с лучом света. Если мы хотим удостовериться в том, что линейка — прямая, мы сравниваем ее по всей ее длине с лучом света, проходящим через ее концы; если мы хотим убедиться в том, что ряд деревьев посажен точно по прямой линии, мы должны стать таким образом, чтобы луч света, падающий от одного конца этого ряда, шел до самого глаза вдоль деревьев; если они все оказываются посаженными точно вдоль луча, мы считаем что ряд прямолинейный.

Мы принимаем, следовательно, как принцип, что свет распространяется прямолинейно. Надо заметить, однако, что это положение верно, только если среда, в которой распространяется свет, однородна в отношении плотности; но в применении к искусству, которое мы здесь только и имеем в виду, редко приходится рассматривать лучи света, проходящие очень большие расстояния и существенно различные по плотности среды; мы можем, следовательно, полагать что среды однородны и лучи строго прямолинейны.

Мы будем различать два случая: первый, когда пространство освещено одной единственной святающейся точкой, и слу-

чай, когда оно освещается светящимся телом конечных размеров; рассмотрим сначала первый из них.

Светящаяся точка посылает по всем направлениям лучи, совокупность которых заполняет все пространство, если только какое-нибудь тело не стоит на их пути. Не так будет, если на пути лучей стоит непрозрачное тело, т. е. такое, которое непроницаемо для световых лучей и задерживает их или отражает частично или полностью; лучи, идущие мимо этого тела, будут продолжать распространяться в пространстве; но те, на пути которых стоит данное тело, будут задержаны и не смогут проникнуть в часть пространства, находящуюся позади него, которое, таким образом, окажется лишенным света.

Построим коническую поверхность с вершиной в светящейся точке, обертывающую непрозрачное тело, и предположим, что она продолжена до бесконечности; эта поверхность будет позади непрозрачного тела границей, отделяющей часть пространства, освещенную лучами, исходящими из светящейся точки, от той части, в которую не проникают лучи. Эту последнюю часть, лишенную света благодаря присутствию непрозрачного тела, мы называем тенью этого тела; таково, по крайней мере, определение понятия *тени*, когда в случае лунного затмения говорят, что луна вступает в тень земли. Солнце является тем светящимся телом, лучи от которого распространяются по всем направлениям; земля есть непрозрачное тело, задерживающее часть лучей; за землей находится часть пространства, лишенная света. Пока луна находится вне этой части пространства, она освещена солнцем, отражает нам его свет и, тем самым, видима; но как только она входит в тень, она не получает и не отражает больше солнечного света и становится невидимой.

В обычной жизни, однако, под словом *тень* понимают нечто иное в том случае, например, когда говорят, прогуливаясь по освещенному солнцем месту, что *тени в полдень коротки*. В этом случае под тенью понимается не простран-

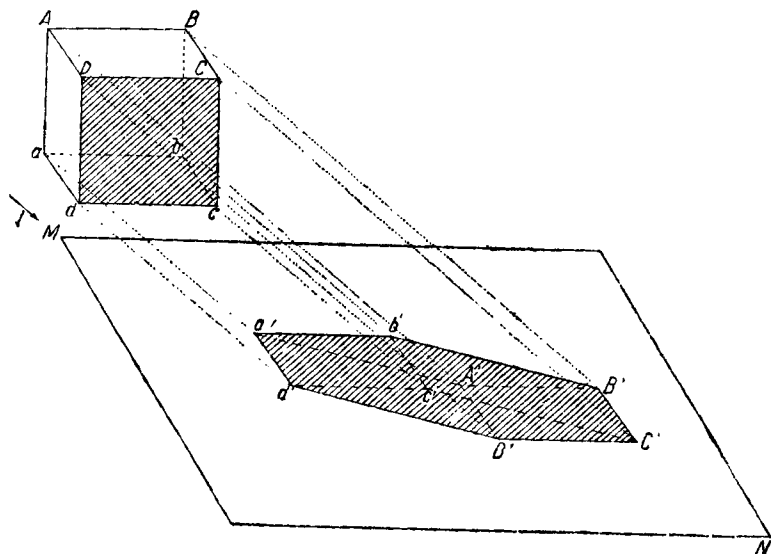
ство, лишенное света благодаря присутствию на его пути тела, задерживающего часть лучей, исходящих из светящейся точки, но проекция этого пространства на какую-нибудь поверхность; мы будем употреблять слово тень в этом последнем смысле.

Предположим, что светящаяся точка находится на бесконечно большом расстоянии, и лучи света, доходящие до нас, параллельны между собой, приблизительно так, как нам представляются солнечные лучи. Рассмотрим в этом предположении два случая: первый, когда отбрасывающее тень непрозрачное тело ограничено плоскостями и, следовательно, прямолинейными ребрами и вершинами многогранных углов, и второй случай, когда тело ограничено закругленными поверхностями. Сначала мы рассмотрим первый случай, исключительно простой.

Если освещенное и отбрасывающее тень тело ограничено плоскими гранями, легко понять, что часть этих граней будет освещена, а другая темная, и что линия, отделяющая на теле освещенную часть от неосвещенной, образована совокупностью прямолинейных ребер пересечения освещенных и темных граней;⁵⁹ эта линия, которую легко найти, определяет контур искомой тени. Если представить себе, что непрозрачное тело исчезло, но эта линия продолжает существовать и имеет при этом заметную толщину, то тень этой линии, падающая на поверхность, будет контуром тени тела. Мы видим, что в рассматриваемом случае задача сводится к нахождению тени некоторых прямых линий, положение которых известно.

Предположим для большей ясности и определенности, что тело, отбрасывающее тень, есть параллелепипед $ABCD\ abcd$ (фиг. 50), что направление параллельных лучей указано прямой LI , и плоскость MN есть поверхность, на которую падает тень. По направлению световых лучей непосредственно можно видеть, что грани $ABCD$, $ABab$, $ADad$ будут освещенными, а грани $DCdc$, $CBcb$ и $abcd$ — темными, и что ребра DC , CB , Bb , ba , ad и dd будут границами между

освещенной и неосвещенной частями. Тени этих шести ребер $D'C'$, $C'B'$, $B'b'$, $b'a'$, $a'd'$ и $d'D'$ на плоскости MN образуют контур или границы тени параллелепипеда; тени шести других ребер, падающие внутрь площади, ограниченной этим контуром, потеряются в общей тени всего тела.



Фиг. 50.

В общем случае, когда речь идет о телах, ограниченных плоскостями, предельные ребра, т. е. те, которые отделяют освещенные грани от неосвещенных, заметны непосредственно, или могут быть легко определены; ниже мы укажем простой способ их надежного нахождения, если при некоторых обстоятельствах в их положении есть какая-нибудь неопределенность. Таким образом, вопрос сводится, как мы уже сказали, к нахождению тени некоторой совокупности заданных прямых линий.

Найдем, прежде всего, тень одной из этих прямых. Заметим, что поскольку нам известна форма отбрасывающего тень тела и его положение относительно плоскости проекций, то ребра, ограничивающие его грани, также заданы относительно

тех же плоскостей; другими словами, мы знаем или можем найти их горизонтальные и вертикальные проекции. Предположим, что светящимся телом является точка, помещающаяся на бесконечно большом расстоянии; в этом случае направление лучей будет задано горизонтальной и вертикальной проекциями прямой линии, которой должны быть параллельны лучи. Лучи света, встречающие прямую, тень которой мы хотим определить, образуют плоскость, положение которой относительно плоскости проекций определяется условием, что она проходит через заданную прямую и параллельна направлению лучей. Эта продолженная плоскость, очевидно, будет заключать в себе тень прямой или, если рассматривать тело, одним из ребер которого является эта прямая, данная плоскость отделяет освещенную часть пространства от той, которая лишена света из-за присутствия тела. Эта плоскость пересечет поверхность, на которую падает тень, по некоторой линии, которая будет тенью, отбрасываемой прямой на эту поверхность, или будет принадлежать к контуру тени заданного тела. Так как положение этой поверхности относительно плоскостей проекций известно, — всегда можно построить ее пересечение с проведенной плоскостью и вполне определить таким образом эту часть контура искомой тени.

Повторим рассуждение, приведенное для первого ребра отбрасывающего тень тела, для его второго, третьего ребер и, наконец, для всех ребер, совокупность которых образует на теле границу между освещенными и неосвещенными гранями.

Если светящаяся точка находится на конечном расстоянии, предыдущее решение будет справедливо при введении в него одного незначительного изменения. Лучи света, исходящие из этой точки, проекции которой известны, и направленные к первому из рассматриваемых ребер, тоже образуют плоскость, определенную в пространстве или относительно всей проекции условием, что она проходит через эту прямую и светящуюся точку; рассуждения, только что приведенные относительно плоскости, заключающей в первом предположе-

нии параллельные лучи света, будут повторены здесь для плоскости, заключающей те же лучи, исходящие из точки, удаленной на конечное расстояние.

Мы видим, что эти исследования являются только простыми применениями способов начертательной геометрии. В интересующем нас случае все решение состоит в следующем: определить на теле, отбрасывающем тень, ребра, отделяющие освещенную часть от темной; провести через эти ребра плоскости, параллельные направлению лучей света или заключающие светящуюся точку, если она не находится в бесконечности, и построить линии пересечения этих плоскостей с поверхностью, на которую падает тень.

Мы сказали, что вообще нетрудно определить предельные ребра, тени которых ограничивают соответственную тень тела; действительно для этого достаточно найти тени всех ребер без разбора; те из них, которые окажутся внутри многоугольника, образующего контур тени тела, не могут быть тенями предельных ребер. Так, на фиг. 50 тени $b'c'$, $d'c'$, $C'c'$, $A'a'$, $A'D'$, $A'B'$ ребер bc , dc , Cc , Aa , AD , AB не принадлежат ни одному из предельных ребер, так как они находятся внутри многоугольника $a'b'B'C'D'd'$.

Но можно и с меньшей затратой труда определить будет ли из двух плоских граней тела одна освещенной и другая темной, или будут они обе освещенными, или обе темными, и, следовательно, будет ли их линия пересечения предельным ребром. Действительно, представим себе луч света, проходящий через некоторую точку этой линии пересечения; если из двух граней одна освещенная, а другая темная, то они будут лежать обе по одну сторону от продолженного луча; если же они обе освещены, или обе темные — луч пройдет между ними. Две рассматриваемые плоские грани принадлежат двум заданным плоскостям в пространстве, следы которых в плоскостях проекций могут быть построены так же, как и горизонтальная и вертикальная проекции линии их пересечения; проведем через некоторую точку на этой линии пересечения

прямую, параллельную направлению лучей, и построим две точки ее пересечения с плоскостями проекций; если эти две точки находятся вне следов заданных плоскостей, луч не проходит между этими двумя плоскостями, и одна из них освещена, а другая нет; если одна из этих точек, или обе, находятся внутри следов, луч света проходит между двумя плоскостями, и эти плоскости или обе освещены или обе темные; в первом случае их пересечение является предельным ребром, во втором — нет. Таким образом, можно заранее определить, какие ребра надо выбрать, чтобы строить контур тени данного тела.

В телах, рассматриваемых в искусстве, часто встречаются вертикальные ребра; поэтому полезно привести следующее замечание. Горизонтальная проекция вертикальной линии сводится к одной точке; линия, проведенная через эту точку в горизонтальной плоскости проекций и направленная к светящейся точке, всегда заключает в себе горизонтальную проекцию тени вертикали, на какую бы поверхность ни падала тень. Этот результат справедлив независимо от того, находится ли источник света на конечном или бесконечном расстоянии. Действительно, и в том и в другом случае, совокупность лучей, проходящих через вертикаль, образует вертикальную плоскость, которая должна заключать тень данной вертикали, и определит ее своим пересечением с поверхностью, на которую падает тень. Аналогично след вертикальной плоскости в горизонтальной плоскости проекции будет заключать горизонтальную проекцию тени, какова бы ни была поверхность, на которую она падает.

В конце концов это замечание применимо к любой прямой, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций. Плоскость, образованная лучами, проходящими через эту прямую, будет тоже перпендикулярна к плоскости проекций, и ее след на эту плоскость должен, очевидно, заключать проекцию на ту же плоскость тени, отбрасываемой прямой, какова бы ни была поверхность. Очевидно, что в некоторых случаях и при над-

лежащем выборе плоскостей проекций, предыдущий результат может значительно способствовать упрощению операций.

Только что сказанное включает приблизительно все, что имеет общее применение в теории теней, и решает вопрос о тенях тела, ограниченных плоскими поверхностями и прямыми линиями и освещенных одной единственной точкой. Книги, обычно издаваемые по этому вопросу, редко содержат больше и только добавляют к тому, что здесь сказано, различные примеры развития графических операций, для которых мы отсылаем читателя к лекциям по начертательной геометрии.⁶⁰

134. Перейдем теперь к случаю, когда тело, отбрасывающее тень, не ограничено плоскостями. Линия, отделяющая по поверхности тела освещенную часть от неосвещенной, уже не будет в общем случае легко находимой совокупностью ребер; теперь — это кривая, которая должна быть определена из единственного свойства быть границей этих двух частей. Лучи света, падающие на освещенную поверхность, при их продолжении проникли бы в тело; темная часть не получает лучей, ибо те, которые могли бы упасть на нее, должны пройти через отбрасывающее тень тело прежде, чем достичь ее; однако легко заметить, что лучи, идущие к линии, отделяющей освещенную часть от неосвещенной, не входят в тело, а только касаются его поверхности. Эти последние лучи, следовательно, касательны к поверхности тела; каждый из них находится в плоскости, касательной к поверхности и проходящей через светящуюся точку. Следовательно, можно построить кривую, о которой идет речь, проводя через светящуюся точку ряд плоскостей, касательных к поверхности заданного тела и определяя точки касания; каждая из этих точек будет принадлежать искомой кривой. Однако мы не остановимся на этом способе решения и изложим другой, также общий и более простой для такого рода исследований, о которых идет речь, ибо известно, что изящество и простота

графических построений зависят от системы способов, применяемых для получения каждого элемента результата.⁶¹

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что источник света находится в бесконечности и что направление лучей дано горизонтальной и вертикальной проекциями прямой, которой должны быть параллельны лучи. Пусть заданы форма тела, отбрасывающего тень, и его положение относительно плоскостей проекций, а также поверхность, на которую падает тень; требуется построить проекцию этой тени и для этой цели найти на поверхности тела, отбрасывающего тень, кривую, отделяющую темную часть от освещенной. Этот последний вопрос, помимо того, что он входит в решение интересующей нас задачи, интересен с точки зрения искусства рисования и живописи; он дает возможность определить, где на поверхности освещенного тела должны прекращаться светлые оттенки и начинаться темные.

Предлагаемый способ аналогичен тому, который был дан в начертательной геометрии для построения пересечений цилиндрических поверхностей.

Представим себе систему плоскостей, параллельных направлению лучей и, кроме того, перпендикулярных к одной из плоскостей проекций, например вертикальной. Операции, которые мы изложили для одной из первых плоскостей, могут быть легко повторены для других.

Заметим прежде всего, что поскольку эта плоскость перпендикулярна к вертикальной плоскости проекций, она целиком проектируется на свой след вместе со всеми линиями, которые она заключает. Ее можно рассматривать как состоящую из линий, параллельных направлению света,⁶² или — что равносильно, световым лучам. Эта плоскость должна, вообще говоря, пересечь поверхность тела, отбрасывающего тень, по кривой.

Некоторые из лучей, лежащих в этой плоскости, встречаются эту кривую и здесь останавливаются: очевидно, что они принадлежат к лучам, перехваченным данным телом, перерыв

которых образует тень позади тела; другие лучи не пересекают кривой и, не встречая никаких препятствий, распространяются дальше в пространстве; наконец, имеются лучи, лежащие между теми и другими, которые лишь касаются кривой; заметим, что, если тело, отбрасывающее тень, не бесконечных размеров, таких лучей должно быть два. Эти последние, являясь касательными к сечению тела рассматриваемой плоскостью, будут также касательны к поверхности тела; их точки принадлежат, следовательно, согласно вышесказанному, кривой, отделяющей освещенную и неосвещенную части поверхности тела; наконец, их точки пересечения с поверхностью, на которую падает тень, принадлежат также контуру этой тени.

Именно эти лучи мы должны уметь находить и строить; свойство, характеризующее их, должно дать нам и самый способ построения. Поскольку они касательны к кривой пересечения поверхности тела, отбрасывающего тень, рассматриваемой нами плоскостью, их горизонтальные проекции должны быть касательны к проекции этой кривой. Поверхность тела известна, и положение секущей плоскости также задано; предположим, что горизонтальная проекция их линии пересечения построена. Если мы проведем к этой проекции касательные, параллельные направлению проекции луча на горизонтальную плоскость, они будут проекциями лучей, о которых идет речь, и их точки касания будут горизонтальными проекциями точек касания лучей с поверхностью данного тела. Проекция или след секущей плоскости в вертикальной плоскости проекций включает и вертикальную проекцию луча; и чтобы определить на этих проекциях проекции точек касания, о которых идет речь, достаточно провести через горизонтальные проекции этих точек перпендикуляры к линии пересечения двух плоскостей проекций. Таким образом, мы находим в горизонтальной и вертикальной проекциях две точки кривой, отделяющей на поверхности данного тела освещенную часть от неосвещенной.

Если повторить только что изложенную операцию для любого числа плоскостей, параллельных лучам и перпендикулярных вертикальной плоскости проекций, мы найдем в горизонтальной проекции ряд подобных точек; проводя через них кривую, получим проекцию кривой, отделяющей освещенную часть от темной на поверхности. Подобным же образом найдем в вертикальной плоскости другой ряд точек, и кривая, проведенная через них, будет вертикальной проекцией той же кривой.

Займемся теперь определением контура тени на поверхности, куда она падает. Рассмотренная нами сначала плоскость, параллельная лучам, определяет вообще, как мы видели, два световых луча касательных к поверхности тела, отбрасывающего тень, и лежащих в той же плоскости. Точки встречи этих лучей с поверхностью, на которую падает тень, принадлежат искомому контуру. Эти точки встречи, очевидно, должны находиться на кривой пересечения плоскости с той же поверхностью. Так как положение плоскости и поверхности известно, можно построить горизонтальную проекцию их пересечения. Предположим, что эта проекция построена; горизонтальные проекции двух рассматриваемых лучей встретят ее в точках, которые будут проекциями точек пересечения самих лучей с поверхностью; и эти последние точки принадлежат, как мы сказали, к искомому контуру. Если из этих точек, полученных в горизонтальной проекции, провести перпендикуляры к линии пересечения плоскостей проекций, эти прямые определяют своими пересечениями с вертикальной проекцией рассмотренной секущей плоскости вертикальные проекции тех же точек контура падающей тени.

Повторяя эту последнюю операцию для каждой из плоскостей, параллельных направлению света, мы получим в обеих проекциях ряд точек; проводя кривые через последние, мы найдем горизонтальную и вертикальную проекции контура тени, падающей от данного тела на заданную поверхность.

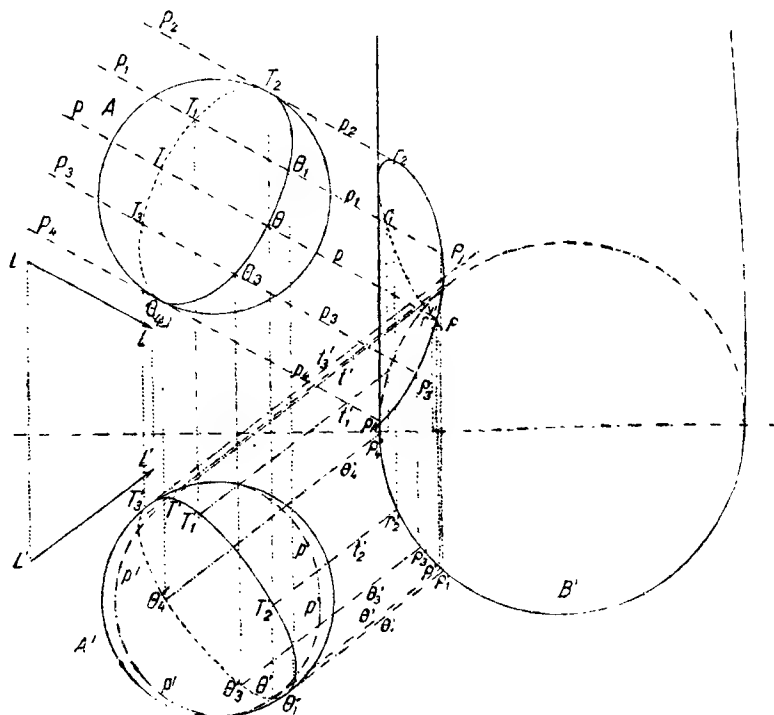
Среди плоскостей, параллельных направлению лучей, могут оказаться такие, которые после пересечения с телом, отбрасывающим тень, не встретят поверхности, на которую она должна упасть, или же только некоторые лучи, касательные к поверхности тела и определенные этими плоскостями, могут не встретить кривую пересечения этих же плоскостей с поверхностью, на которую должна упасть тень. И в том и в другом случае оказывается, что не вся тень тела полностью ложится на данную поверхность, но часть ее или падает на другую, более удаленную поверхность, или же теряется в пространстве.

Для облегчения понимания всего изложенного мы дадим один пример.

Пусть некоторый шар представлен вертикальной и горизонтальной проекциями A и A' (фиг. 51) двух своих больших кругов; предположим, что направление лучей задано проекциями LL , $L'L'$ линии, которой они должны быть параллельны, и будем искать горизонтальную и вертикальную проекции линии, отделяющей освещенную часть поверхности шара от неосвещенной, и проекции контура тени, отбрасываемой шаром на прямой цилиндр с круговым основанием, заданный в горизонтальной проекции кругом B' .

Согласно изложенному методу, построим ряд плоскостей, параллельных направлению лучей, перпендикулярных вертикальной плоскости проекций и, следовательно, проектируемых на эту плоскость их следами Pp , P_1p_1 , P_2p_2 и т. д. Рассмотрим, в частности, плоскость P ; она пересечет шар по кривой, вертикальная проекция которой не может лежать вне следа Pp , и горизонтальная проекция будет кривой $p'p'p'p'$. Построив последнюю, проведем к ней две касательные $\Theta'\theta'$ и $T't'$, параллельные $L'L'$, которые будут горизонтальными проекциями двух лучей, касательных к шару; вертикальные проекции этих же лучей совпадут со следом Pp . Точки касания T' и Θ' будут проекциями двух точек касания этих лучей с шаром и принадлежат, следовательно, к кривой, разделяю-

щей на поверхности освещенную и темную части. Чтобы найти вертикальные проекции тех же точек, проведем линии $T'T$ и $\Theta'\Theta$, перпендикулярные к пересечению плоскостей проекций и продолженные до встречи со следом $P\rho$; точки T и Θ будут



Фиг. 51.

вертикальными проекциями двух искомых точек. Повторяя для каждой из плоскостей P_1, P_2, P_3, P_4 и т. д. операцию, выполненную для плоскости P , мы найдем в горизонтальной плоскости кривую $T'T_1T_2'\Theta_1'\Theta_2'\Theta_3'T_3'$ и в вертикальной кривую $TT_1T_2\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_4T_3$, которые будут проекциями линии, отделяющей на поверхности шара освещенную часть от темной.

Вернемся к лучам, для которых $T't'$ и $\Theta'\theta'$ являются горизонтальными и Pp — вертикальными проекциями, и найдем точки их встречи с поверхностью цилиндра; это будут точки контура тени, отбрасываемой шаром на поверхность цилиндра. Плоскость P пересекает поверхность цилиндра по кривой, проектируемой в горизонтальной плоскости по кругу, служащему основанием цилиндру. Линии $T't'$ и $\Theta'\theta'$ встречают этот круг в точках r' и ρ' , которые являются, следовательно, горизонтальными проекциями искомых точек пересечения; чтобы найти их вертикальные проекции, достаточно провести линии $r'r$ и $\rho'\rho$, перпендикулярные к пересечению двух плоскостей проекций, до их пересечения с линией Pp . Повторяя эту последнюю операцию для плоскостей P_1P_2 и т. д., найдем вертикальные проекции различных других точек контура тени, отбрасываемой шаром на цилиндр, и построим кривую $r'r_1r_2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$, которая будет вертикальной проекцией этого контура.

Рассматривая плоскость P_3 и две линии $T'_3t'_3$ и $\theta'_3\theta'_3$, которые являются горизонтальными проекциями двух лучей, касательных к шару и лежащих в данной плоскости, мы заметим, что одна из этих проекций, а именно $T'_3t'_3$, не встречается основания цилиндра, являющегося, как мы это указывали, горизонтальной проекцией сечения цилиндрической поверхности плоскостью P_3 ; луч, которому принадлежит проекция $T'_3t'_3$, не встречается поверхности и проходит стороной. Отсюда мы заключаем, что тень от шара не целиком падает на цилиндр, и что контур этой тени на цилиндрической поверхности не замкнут, но прерывается в точках, где лучи, касательные к шару, касаются также и цилиндра.⁶³

135. Мы предполагали до сих пор, что источник света бесконечно удален, и это предположение чаще всего применяется, так как оно примерно соответствует освещению тел солнцем; но если бы мы предположили, что светящаяся точка находится на конечном расстоянии, то для применения изложенного способа и в этом случае достаточно заменить параллельные пло-

скости, которыми мы пользовались, рядом плоскостей, проходящих через светящуюся точку и перпендикулярных к вертикальной плоскости проекций, как мы это делали раньше.

Изложенный способ может быть иногда упрощен в частных случаях в зависимости от способа образования поверхностей тел, отбрасывающих и принимающих тень. Мы отсылаем для этого к способам начертательной геометрии, которые в подобных исследованиях дают возможность различных интересных приложений. Нам достаточно было показать способ решения в общем виде задачи графического определения теней в случае, если светящееся тело ограничивается одной точкой.

Решение этой задачи отвечает более или менее всем требованиям, которые предъявляются в искусстве рисования; то что нам остается сказать, позволит сделать некоторые выводы, не лишённые интереса для этого рода искусства; но так как предположение, что источник света имеет конечные размеры, исключительно усложняет графические построения и тем самым сводит их значение почти к нулю; мы будем рассматривать эту последнюю часть линейного определения теней скорее с точки зрения теории, чем с точки зрения ее приложений.

Если источник света является точкой, и ничто в пространстве не отражает света, то тень, отбрасываемая непрозрачным телом на помещенную позади него поверхность, должна быть совершенно черной, ибо ни один луч не может достигнуть ее ни непосредственно в силу присутствия непрозрачного тела, ни косвенно, поскольку мы предположили, что не существует других предметов, способных отражать свет. Эта тень, будучи абсолютно черной, должна быть, следовательно, одинаковой на всей ее площади и, кроме того, она будет ограничена своим контуром, который будет совершенно отчетливой и хорошо выраженной линией.

Не так обстоит дело, когда источник света имеет конечные размеры, контур тени не резко ограничен, и переход от

тени к свету наступает постепенно путем мало заметной градации.

Действительно, посмотрим что получится в этом случае, если мы опять будем предполагать, что в пространстве существует только источник света, непрозрачное тело и поверхность, на которую падает тень.

Построим плоскость, касательную одновременно и к светящемуся и к непрозрачному телам таким образом, чтобы оба тела были расположены по одну сторону от нее; затем построим вторую плоскость, также касательную и бесконечно близкую к первой, которую она пересечет по прямой, одновременно касательной в обоих последних плоскостях. Построим еще третью касательную плоскость, бесконечно близкую ко второй; она пересечет ее по другой прямой, одновременно касательной в двух последних плоскостях, и мы заметим, что эта вторая прямая должна пересечь первую, так как обе лежат во второй касательной плоскости. Увеличивая таким образом число касательных плоскостей, мы получим ряд линий, касательных одновременно к обоим телам и пересекающихся попарно; эти линии будут принадлежать к некоторой поверхности, которая по указанному нами способу ее образования принадлежит к роду *развертываемых* поверхностей (§ 110).

Эта развертываемая поверхность обертывает одновременно и светящееся тело и непрозрачное, и в заключаемую ею часть пространства, расположенную позади непрозрачного тела, не может проникнуть ни один луч, исходящий из источника света; площадь, ограниченная кривой пересечения этой поверхности с той, на которую падает тень, будет совершенно черной и, следовательно, равномерной темноты на всем ее протяжении.

Теперь вообразим другой ряд плоскостей, касательных к источнику света и к непрозрачному телу, но расположенных таким образом, что оба тела находятся по разные стороны от плоскостей; последовательные пересечения этих плоскостей образуют, как и в предыдущем случае, новую раз-

вертываемую поверхность, которая будет также обертывать светящееся и непрозрачное тело; но мы заметим, что относительно этой поверхности и составляющих ее прямых линий одно из тел находится с одной, а другое с другой стороны. Из такого расположения их следует, что из всех точек, внешних относительно этой второй развертываемой поверхности, светящееся тело видно целиком, и никакая его часть не заслоняется непрозрачным телом. Если построить пересечение этой поверхности с той, на которую падает тень, то каждая из точек, лежащих вне этого пересечения, будет вполне светлой, т. е. она получит все лучи, доходящие до нее из источника света.

Если теперь рассмотреть обе эти развертываемые поверхности одновременно, мы заметим, что в пространстве, заключенном между ними за пределами их кривых касания с непрозрачным телом, часть лучей, исходящих от источника света, заслоняется непрозрачным телом, и что, таким образом, эта часть пространства не полностью освещена. Исследуя затем, что происходит на поверхности, на которую падает тень, мы найдем, что площадь, заключенная между двумя контурами, образованными пересечением этой поверхности с двумя развертываемыми поверхностями, образует, вообще говоря, род кольца, в котором и тень и свет неполные. В середине кольца находится область полной тени и снаружи его — область полной освещенности; но каждая из точек, расположенных внутри кольцевой зоны, получает только часть лучей, исходящих от источника света, а другая часть заслоняется непрозрачным телом. Если точка, выбранная в кольцевой зоне, лежит близко к внутреннему контуру, образуемому первой развертываемой поверхностью, она может получать свет лишь от очень маленького сегмента светящегося тела, так как все остальное заслоняется непрозрачным телом; следовательно, в этой точке тень очень сильная. Если же точка лежит вблизи от внешнего контура, образуемого второй развертываемой поверхностью, то для нее лишь очень незначительная часть

источника света заслонена непрозрачным телом; она, следовательно, очень близка к полной освещенности. Из всего этого видно, что от внутреннего контура к внешнему, определенным разворачиваемыми поверхностями, тень идет убывая, и освещенность возрастает таким образом, что между полной тенью, заключенной во внутреннем контуре, и полной освещенностью, лежащей за внешним контуром, имеется очень мало заметная градация; эта кольцевая зона, окружающая полную тень, в которой и тень и освещенность не полны, называется *полутенью*.

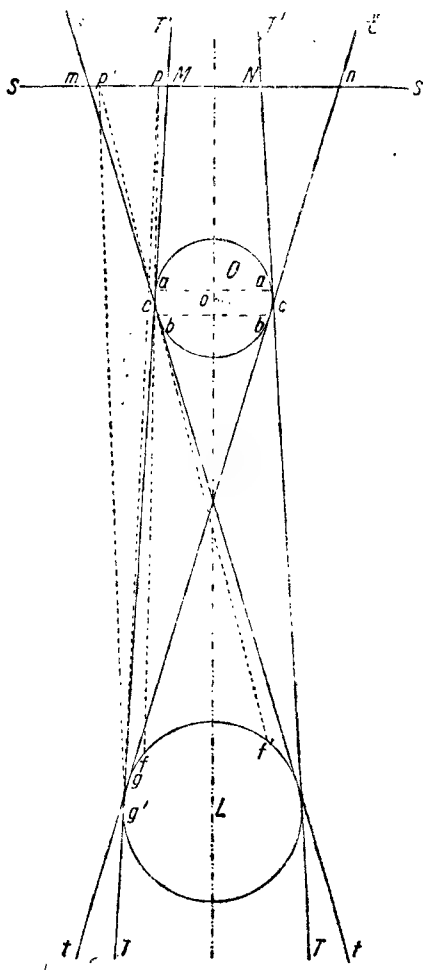
До сих пор мы рассматривали только распределение тени и света на поверхности, помещенной позади непрозрачного тела; нам остается рассмотреть его и на поверхности самого тела.

Кривая касания первой разворачиваемой поверхности с телом образует линию, отделяющую освещенную часть поверхности от неосвещенной. Кривая касания со второй разворачиваемой поверхностью также образует на поверхности непрозрачного тела линию, отделяющую точки, для которых часть лучей заслонена самой выпуклостью непрозрачного тела от тех точек, для которых эта выпуклость не играет роли. Таким образом, на поверхности непрозрачного тела между его освещенной и неосвещенной гранями существует зона *полутени*, в которой интенсивность тени постепенно уменьшается, переходя от полной тени к полной освещенности.

То, что мы только что изложили для общего случая занимающей нас задачи, значительно упрощается и становится более ясным в частных случаях. Предположим, что оба тела, светящееся и непрозрачное — шары, представленные кругами L и O (фиг. 52) в плоскости проекций, проходящей через их центры; пусть поверхность, на которую падает тень, есть плоскость SS , перпендикулярная к линии LO , соединяющей центры обоих шаров. В этом случае все плоскости, касательные одновременно к обоим телам и расположенные все по одну сторону от обоих тел, образуют, как известно,

своими последовательными пересечениями коническую поверхность, которую мы укажем линиями TT' , TT' пересечения этой поверхности с плоскостью проекций. Ее вершина или центр окажется позади шара O , если его радиус меньше радиуса шара L , и, наоборот, позади шара L , если этот последний является меньшим из двух. К этой конической поверхности сводится первая развертываемая поверхность, о которой мы говорили, рассматривая задачу в общем случае. Можно легко видеть, что пространство, заключенное ею позади непрозрачного шара не может получать никаких лучей, исходящих от шара L ; пересечение этой конической поверхности плоскостью SS будет кругом с диаметром MN , площадь которого совершенно лишена света.

Если мы проведем теперь другие плоскости, также касательные к обоим шарам, но расположенные таким образом, что по отношению к каждой из них один шар помещается с одной, а другой — с другой стороны, то эти



Фиг. 52.

плоскости образуют своими последовательными пересечениями другую коническую поверхность, вершина которой будет помещаться между обоими шарами; мы обозначим эту поверхность, как и первую, линиями tt' , tt' ее пересечения с плоскостью проекций; эта вторая коническая поверхность соответствует второй развертываемой поверхности, о которой мы говорили в общем случае. Мы видим, что все пространство, лежащее вне этой поверхности, получает все лучи из шара L , и ни один из них не задерживается шаром O . Плоскость SS пересекает эту поверхность по кругу с диаметром mn , и все точки плоскости, внешние относительно этого круга, получают лучи без препятствий со стороны непрозрачного шара.

Но пространство, заключенное между обоими коническими поверхностями за пределами их кривых касания с шаром и обозначенное на плоскости проекций условными зонами $T'ct'$, $T'ct'$, получает не все лучи от шара L , так как из каждой его точки видна только часть светящегося тела, а другая заслонена от него непрозрачным телом: это пространство будет, следовательно, ни вполне темным, ни вполне освещенным. Точки плоскости SS , расположенные между кругом диаметра MN и кругом диаметра mn , относятся к этому случаю; промежуток между этими двумя кругами образует кольцо, в котором ни тень, ни свет не будут полными.

Если взять на этом кольце точку, лежащую близко к внутреннему кругу, например точку p , то мы увидим согласно данной фигуре, что она может получать лучи только от части шара L , соответствующей дуге gf ; если мы, наоборот, возьмем точку p' , близкую к внешнему кругу, то мы убедимся в том, что она получает лучи от части светящегося шара, соответствующей дуге $g'f'$, значительно большей, чем gf ; следовательно, освещенность в области, которую мы называли полутенью, должна увеличиваться от внутреннего круга к внешнему, а тень соответственно уменьшаться.

На поверхности непрозрачного тела кривая касания первого конуса будет кругом, проектируемым по своему диаметру aa .

Кривая касания второго конуса будет другим кругом, проектируемым по диаметру bb . Часть поверхности шара O , лежащая позади круга aa , лежит в полной тени; та, которая находится впереди круга bb , получает беспрепятственно все лучи света. Но из точек, расположенных в зоне, заключенной между обоими кругами, видна только часть светящегося шара; следовательно, они будут находиться в состоянии промежуточном между освещенностью и тенью, и тень постепенно ослабевает от круга aa к кругу bb без резких и заметных переходов; во всем протяжении этой зоны имеется также род *полутени*.

Определение контуров полутени геометрическими методами можно вообще считать бесполезным, тем более, что это очень длинно и утомительно; но некоторые достаточно простые замечания могут дать указание о ширине, которую надлежит придавать полутени.

Если, оставляя неизменным расстояние между светящимся телом L и непрозрачным O , приближать к последнему параллельно самой себе плоскость SS , то линия Nn , определяющая ширину полутени, уменьшается; при удалении плоскости, она увеличивается. Легко можно видеть, что она пропорциональна расстоянию между непрозрачным телом и плоскостью, на которую падает тень, и что она зависит от угла pcN , составляемого образующими TT' и tt' двух конусов, обертывающих светящийся и непрозрачный шары; этот угол, в свою очередь, зависит от расстояния между обоими телами и размеров светящегося тела.

Если мы предположим, что светящимся телом является солнце, то, поскольку расстояние этого светила до земли практически везде одинаково, угол, о котором идет речь, всегда один и тот же, каково бы ни было непрозрачное тело, освещенность которого солнцем мы рассматриваем. Этим углом измеряется так называемый *видимый диаметр солнца*; так как он составляет приблизительно полградуса, мы можем считать, что ширина полутени будет приближенно равняться

$1/115$ части расстояния между отбрасывающим тень телом и плоскостью, на которую она падает и которую мы будем считать более или менее перпендикулярной к направлению лучей. Легко видеть, что при перемещении этой позиции, ширина полутени будет возрастать обратно пропорционально синусу угла, образуемого плоскостью с направлением света; полагая, например, этот угол равным 45° , мы найдем, что ширина полутени должна составлять $1/81$ часть расстояния между точкой, отбрасывающей тень, и плоскостью, на которую она падает.

Поэтому существенно увеличивать на рисунках ширину полутени по мере удаления падающей тени от отбрасывающего ее предмета; приведенных здесь результатов достаточно, чтобы определить протяженность каждой части полутени с точностью большей, чем обычно имеют самые рисунки.

Мы заметим, что на поверхности непрозрачного тела также имеется полутень или зона неполного освещения. Предположим опять, что это тело есть шар O , и для нахождения величины дуги ba , измеряющей ширину полутени, проведем в точках b и a две нормали к поверхности, которые, в случае шара, будут радиусами ob и oa . Известно, что угол между нормальными равен углу между касательными Tt' и tt' ; таким образом, величина дуги ba зависит лишь от двух элементов: от угла, образованного касательными, и радиуса ob , которому эта дуга пропорциональна.

Если свет приходит от солнца, — рассматриваемый угол всегда один и тот же, каково бы ни было освещенное тело, и составляет приблизительно полградуса.

Отсюда мы заключаем, что ширина полутени на шаре приблизительно равна $1/115$ его радиуса.⁶⁴

Этот результат может быть без значительной погрешности распространен на тело какой угодно формы; в таком случае для определения ширины полутени в некоторой точке линии, отделяющей на поверхности тела освещенную часть от темной, надо провести через нее в направлении лучей плоскость,

нормальную к поверхности тела, и взять $1/115$ радиуса кривизны этого сечения.

Мы ограничимся сказанным в отношении той части теории теней, которая имеет целью геометрическое определение их контуров; нам остается рассмотреть ее другую часть, относящуюся к определению интенсивности оттенков, придаваемых различными частями затененных поверхностей, для лучшего изображения на рисунках света и тени, являемой данными предметами в действительности. Чтобы охватить подобный вопрос во всем его объеме, уже недостаточно ограничиться рассмотрением, как мы это делали до сих пор, светящегося тела, тела непрозрачного, и поверхности, на которую падает тень, но также нельзя не принимать во внимание различные дополнительные обстоятельства; мы должны рассматривать предметы вместе со всем, что их окружает в действительности, и учитывать, помимо прочих вещей, также и положение наблюдателя и изменения, которые может испытать свет на пути к его глазу, — только тогда мы можем передать все ощущение картины, на которую направлен его взгляд. Эти соображения требуют, чтобы мы предпосылали тому, что хотим сказать по этому вопросу, изложение теории перспектив.



ТЕОРИЯ ПЕРСПЕКТИВЫ⁶⁵



Способы изображения предметов в перспективе

136. Искусство перспективы заключается в изображении на картине, форма и положение которой известны, предметов, также заданных по форме и положению, такими, как они кажутся глазу с определенной точки зрения. Чтобы сделать это определение еще более понятным, предположим, что картиной является сначала прозрачное стекло. Если из всех точек изображаемых предметов провести лучи, направленные к глазу, так, чтобы они, проходя через прозрачную картину, оставляли на ней свои следы, запечатленные в тех же красках и оттенках, какими обладают данные точки, то совокупность всех этих следов представит на стекле законченное изображение предметов; к получению именно такого изображения и стремятся в искусстве перспективы. Мы видим, что здесь, как и в теории теней, надо рассматривать две отдельные части: одна — чисто геометрическая, и ее задачей является точное изображение на картине положения каждой воспроизводимой точки; другая имеет целью передачу оттенков света и тени, которые должны быть приданы каждой части картины, и ее надо рассматривать главным образом на основании соображений физических. Эта последняя часть, называемая *воздушной перспективой*, целиком входит в круг исследова-

ний, которые мы попытаемся изложить позднее для дополнения теории теней; мы будем заниматься здесь только первой частью, называемой *линейной перспективой*.

На основании только что данных определений легко понять, что линейная перспектива сводится к построению сечения данной поверхностью пирамиды, вершина и основание которой заданы. Глаз является вершиной; основанием служит рассматриваемая на поверхность предмета, который мы изображаем в перспективе, линия обвода лучом зрения, а секущей плоскостью является сама картина.

Способы начертательной геометрии легко дают решение этой задачи в самом общем виде, т. е. даже в предположении, что картина является какой угодно кривой поверхностью; однако, поскольку мы имеем в виду только то, что непосредственно применяется в искусстве, мы рассмотрим с некоторыми подробностями только построение перспективы на плоскости и ограничимся лишь некоторыми замечаниями относительно перспективы на кривых поверхностях.

Предположим, что картина представляет собой плоскость, вертикальную или перпендикулярную той из плоскостей проекций, которую мы считаем горизонтальной; можно было бы также без особых затруднений представить себе ее наклоненной каким-либо образом относительно этих плоскостей, но предположение, на котором мы останавливаемся, более естественно и упрощает построение.

Итак, пусть положение глаза и предмета, форма которого известна, а также положение некоторой вертикальной плоскости заданы относительно плоскостей проекций; надо определить точки пересечения с этой плоскостью прямых, проведенных из глаза ко всем точкам данного предмета, и перенести их на картину, представляющую эту самую вертикальную плоскость в предположении, что она опущена.

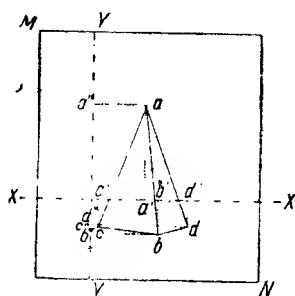
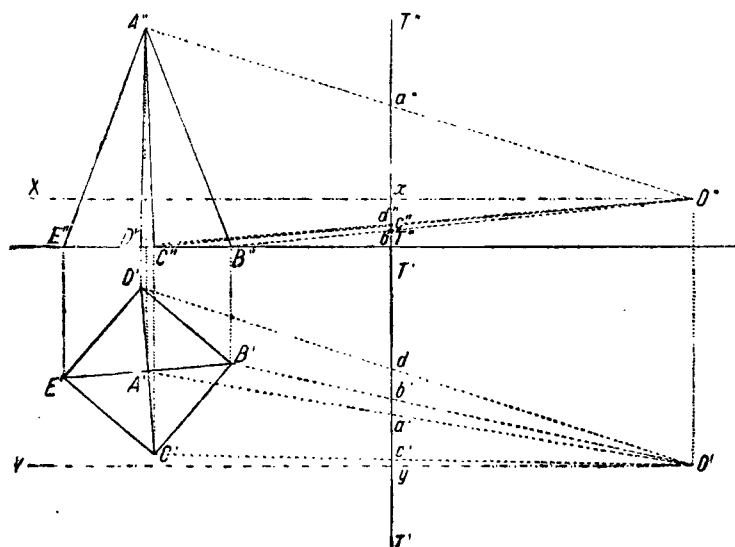
Существует много более или менее простых и удобных способов для построения точек пересечения в зависимости от относительного положения предмета, глаза и картины;

мы изложим прежде всего самый простой и обычно самый удобный путь.

Прежде всего выберем такое положение вертикальной плоскости проекций, чтобы плоскость картины была бы ей перпендикулярна и, следовательно, проектировалась на ней при помощи вертикальной линии, которая была бы ее следом. Пусть O' и O'' (фиг. 53) проекции глаза, $T' T'$ и $T'' T''$ — проекции картины или следы вертикальной плоскости, в которой она находится; предположим, что проекции предметов, которые мы хотим изобразить в перспективе, уже построены, или что их надлежит начать строить в принятых плоскостях проекций; например проекции пирамиды с четырехугольным основанием, вершины которой A, B, C, D, E заданы в горизонтальной проекции точками A', B', C', D', E' и в вертикальной — точками A'', B'', C'', D'', E'' .

Если провести из глаза луч к первой точке заданного предмета, то проекции этой линии представятся прямыми $O'A'$ и $O''A''$. Точки a' и a'' , в которых эти прямые пересекают проекции $T' T'$ и $T'' T''$ картины, будут, очевидно, проекциями точек пересечения луча зрения с картиной; остается только найти положение этой точки на самой картине, которую мы будем полагать переиесенной из положения $T' T' T'' T''$ в положение MN . Для этого определим на картине две линии, принимаемые за оси, к которым должно быть отнесено положение всех других точек; после того как положение этих осей относительно плоскостей проекций определено, остается найти расстояние от каждой из них до точки встречи луча зрения с картиной и, зная эти расстояния, отметить положение точки на картине. Так как эти оси могут быть выбраны произвольно, мы предположим, что через глаз проведены две плоскости, перпендикулярные к картине — одна горизонтальная и другая вертикальная; их следы на плоскости проекций будут $O'Y$ и $O'X$; они пересекут плоскость картины по двум линиям, одной горизонтальной, представленной в вертикальной проекции точкой x , и другой — вертикальной, представленной в горизон-

тальной проекции точкой y ; эти две линии мы и примем за оси и представим их на картине: горизонтальную ось — прямой XX вертикальную ось — прямой и YY .



Фиг. 53.

Мы уже говорили, что a' есть горизонтальная проекция точки пересечения с картиной луча зрения, проходящего через точку A ; ya' будет, следовательно, расстоянием, на кото-

ром эта точка должна находиться от вертикали, проходящей через точку y , или от оси YY на картине MN . Если провести на картине прямую aa' , параллельную оси YY , на расстоянии равном ya' справа или слева от оси YY , в зависимости от того лежит ли a' в горизонтальной проекции справа или слева от y , то эта прямая aa' будет заключать искомую точку. Подобным же образом, так как a'' есть вертикальная проекция той же точки, xa'' измеряет расстояние, на котором эта точка находится от горизонтальной оси, проведенной на картине через точку x . Теперь проведем на картине прямую $a'a$, параллельную оси XX , помещая ее выше или ниже оси в зависимости от того, выше или ниже будет находиться в вертикальной проекции точка a'' относительно точки x ; пересечение двух линий $a'a$ и $a''a$, параллельных осям, даст искомую точку или перспективу точки A . Можно проделать ту же операцию для всех точек пирамиды $ABCDE$ и получить таким образом ее полную перспективу.⁶⁶

Несколько замечаний помогут значительно упростить работу. Заметим сначала, что если картина представляет собой плоскость, то перспектива прямой линии есть прямая. Действительно, лучи зрения, проведенные из глаза к различным точкам данной прямой, лежат в плоскости, проведенной через глаз и эту прямую; следовательно, их точки пересечения с картиной должны лежать на прямой пересечения картины с плоскостью, в которой они находятся. Значит для построения перспективы прямой линии достаточно построить перспективы двух ее точек и провести через них прямую. На взятом нами примере можно ограничиться построением перспективы пяти вершин A, B, C, D, E пирамиды, и, соединяя их прямыми, получить перспективы ребер. С другой стороны, если тело, которое мы желаем изобразить в перспективе, непрозрачно и непроницаемо для лучей зрения, то его передняя часть закроет всю остальную; бесполезно поэтому находить перспективу для точек, принадлежащих этой части; так как в рассматриваемом примере точка E пирамиды не может быть

видна для глаза, находящегося в O , то бесполезно искать на картине MN соответствующую ей точку.

Видимая часть предмета отделяется от невидимой для глаза линией, которую называют видимым контуром.

Перспектива видимого контура есть контур на картине, обертывающий изображение предмета; поэтому весьма важно точно определить видимый контур предмета и внимательно построить его перспективу.

Когда изображаемые предметы ограничены плоскостями и прямолинейными ребрами, то, вообще говоря, нетрудно отличить грани, видимые при данном положении глаза от невидимых, и, следовательно, найти те ребра, совокупность которых составляет линию видимого контура. Но если эти предметы ограничены кривыми поверхностями, видимый контур уже не образован прямыми линиями; тогда приходится определять на поверхности тела кривую на основании ее особенного свойства отделять часть тела, видимую при определенном положении глаза — от невидимой. Эта задача совершенно подобна отысканию на поверхности непрозрачного тела линии, отделяющей освещенную часть от неосвещенной, в том случае, если источником света является точка, помещенная на конечном расстоянии; совершенно также надо найти кривую касания конуса с заданной вершиной, который обертывает тело, ограниченное заданной поверхностью. Мы не считаем нужным останавливаться на этом исследовании и отсылаем к решениям совершенно аналогичных задач, данным нами в теории теней.

137. Приведем здесь один очень важный результат из теории перспективы, существенный для правильности рисунков; он состоит в том, что всякий раз, когда надо изобразить в перспективе на некоторой картине ряд прямых, параллельных между собой (но не параллельных самой картине), то перспективы этих прямых должны сходиться в одной точке. Если картина плоская — эти перспективы сами будут прямыми, проходящими через одну точку, что нетрудно доказать.

Действительно, если дана прямая, перспективу которой надо построить, мы замечаем, что совокупность всех лучей зрения, проведенных из глаза к этой линии, образует плоскость, проходящую через нее и через глаз, и ее пересечение с картиной дает искомую перспективу; если мы вообразим прямую, проведенную через глаз параллельно данной линии, она будет целиком лежать в той же плоскости. Пусть имеется вторая линия, параллельная первой, и мы должны построить и ее перспективу; построим плоскость, проходящую через нее и через глаз, пересечение которой с картиной дает требуемую перспективу, затем проведем через глаз прямую, параллельную второй линии, которая будет целиком лежать во второй плоскости. Так как обе данные прямые между собой параллельны, то прямые, проведенные через глаз параллельно им обэим, сольются в одну, которая должна лежать одновременно и в первой и во второй плоскостях, т. е. быть их линией пересечения; точка, в которой она встречает картину, будет, следовательно, точкой пересечения линий, по которым эти плоскости пересекают картину или, что равносильно, точку, где сходятся перспективы. Отсюда следует, что для построения перспективы какого угодно числа параллельных прямых достаточно провести через глаз линию, им параллельную; точка, где эта последняя встретит картину, будет точкой пересечения, к которой будут стремиться перспективы всех этих прямых.

Проекция прямой, проходящей через глаз, параллельна проекциям линии, перспективу которой мы ищем, и, следовательно, их легко построить; мы имеем следы плоскости картины в плоскостях проекций; поэтому не составляет труда найти точку пересечения прямой с картиной.

Изложенный результат может значительно сократить все операции, когда картина является плоскостью, и речь идет о построении на ней перспективы различных параллельных линий. В этом случае перспективы сами являются прямыми, и, после того как определена, согласно вышеизложенному,

точка их пересечения, достаточно для их построения знать на картине для каждой из них перспективу еще одной точки.

Только что изложенное представляет интерес не только с точки зрения сокращения работы; это в то же время и самый верный способ избежать ошибок, к которым особенно чувствителен глаз. Вообще говоря, мы не так чувствительны к действительным размерам предметов, как к параллелизму линий, которые, по нашему представлению, должны быть параллельными. Только опытный глаз, да и то при внимательном рассмотрении, может обнаружить, что две линии немного более удалены или, наоборот, сдвинуты, чем нужно, но непараллельность двух линий, которые должны быть параллельны между собой, сразу бросается в глаза каждому и притом производит очень неприятное впечатление. Если, следовательно, при изображении в перспективе нескольких параллельных линий, их перспективы не сходятся в одной точке, как это должно быть на самом деле, то эта ошибка неприятно поражает зрителя, и параллельные линии ему не кажутся таковыми; поэтому весьма существенно определить на картине точку схода перспектив параллельных прямых линий, чтобы иметь уверенность в том, что перспективы проходят через эту точку.

В данном нами выше изложении процесса построения мы предполагаем, что вертикальная плоскость проекций перпендикулярна к плоскости картины; такое расположение представляет то преимущество, что вся картина целиком проектируется на одну единственную линию. Если картина наклонена к вертикальной плоскости проекций, то для нахождения высоты каждой точки перспективы над горизонтальной плоскостью, к которой она отнесена, надо из точки пересечения горизонтальной проекции луча зрения с горизонтальным следом картины опустить перпендикуляр на линию пересечения двух плоскостей проекций и продолжить его до пересечения с вертикальной проекцией луча зрения. Этот способ, хотя и довольно длинный, может в некоторых случаях оказаться

менее утомительным, чем предварительное построение вертикальной проекции в плоскости, перпендикулярной картине.

Предположим, что надо изобразить в перспективе ряд одинаковых столбов, направление которых наклонно к плоскости картины; было бы очень долго строить их проекции в вертикальной плоскости, перпендикулярной картине; но если выполнить проекции в плоскости, перпендикулярной направлению столбов, можно ограничиться проектированием только одного из них. Мы видим, что в этом случае предпочтительно воспользоваться этим последним способом, несмотря на необходимость проводить при построении перспективы каждой точки лишнюю линию.

138. Вообще говоря, задача линейной перспективы сводится к построению точки пересечения с картиной луча зрения, проведенного из глаза к требуемой точке; полезно знать разные способы решения этой задачи, чтобы иметь возможность выбирать в каждом данном случае тот, который требует наименьшей затраты труда. Большая часть способов, излагаемых в руководствах по перспективе, и в особенности тот, который мы здесь развиваем, входят в общий путь решения, который мы сейчас рассмотрим.

Если через глаз и точку, перспективу которой мы хотим построить, провести две различные плоскости, то луч зрения совпадает с их пересечением, и так как эти плоскости непременно пересекают картину, то точка пересечения их следов на плоскости картины будет принадлежать пересечению самих плоскостей и, следовательно, окажется точкой встречи луча зрения с картиной. Художник должен сам выбрать из бесчисленного множества плоскостей, которые могут проходить через глаз и точку, перспективу которой он ищет, те две плоскости, следы которых ему будет легче всего построить на картине. Выбирая их так, чтобы каждая из них была перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, мы вернемся к способу построения, уже рассмотренному выше. Часто бывает

удобно выбрать одну из этих плоскостей перпендикулярной самой плоскости картины; в этом случае, как легко видеть, ее след пройдет через основания перпендикуляров, опущенных из глаза и данной точки на картину; в более общем случае, если провести через точку и глаз две параллельные прямые, то пересечение картины с заключающей их плоскостью пройдет через точки, в которых эти параллельные прямые пересекают самую картину.

Этих нескольких замечаний достаточно, чтобы лица, владеющие методами начертательной геометрии, были в состоянии сокращать и упрощать во многих случаях операции, которых требует практика линейной перспективы.

Предположим теперь, что картина не плоская, а некоторая заданная кривая поверхность; изложенные нами соображения должны, вообще говоря, привести в каждом данном случае к наиболее удобному из всех возможных построений. Действительно, из всех плоскостей, проходящих через глаз и точку, перспективу которой мы ищем, и заключающих, следовательно, луч зрения, мы всегда можем выбрать ту, пересечение которой с картиной, в силу известных свойств ее поверхности, даст кривую, наиболее простую для построения, будь то в самой рассматриваемой плоскости или в одной из ее проекций. Далее нетрудно будет найти точку пересечения этой кривой с лучом зрения, которая определит точку пересечения луча с самой картиной.

Если, например, картина представляет собой сферическую поверхность, то надо, чтобы плоскость, проходящая через глаз и точку, перспективу которой мы хотим построить, одновременно проходила и через центр сферы; тогда линия пересечения всегда будет большим кругом, и его пересечение с лучом зрения в самой его плоскости будет легко найти.

Если картина представляет собой коническую поверхность, мы должны всегда строить плоскость, заключающую луч зрения, так, чтобы она проходила через вершину конуса; линия пересечения этой плоскости с картиной будет прямой, для кото-

ей нетрудно найти проекции и точки их пересечения с лучом зрения.

Панорамы представляют собой перспективы, построенные на вертикальных цилиндрических поверхностях с круговым зрением, так, что точка зрения лежит на самой оси поверхности. Чтобы построить перспективу какой-нибудь точки на поверхности вертикального цилиндра, мы проведем через глаз и заданную точку вертикальную плоскость, которая пересечет эту поверхность по одной из ее образующих, определяемой пересечением горизонтального следа плоскости окружностью круга, служащего основанием цилиндра. Точка пересечения вертикальной проекции этой образующей с одноименной проекцией луча зрения определит высоту над основанием цилиндра точки встречи луча зрения с его поверхностью; на основании этих данных легко построить перспективу данной точки на самой поверхности цилиндра или на картине в предположении, что поверхность развернута.

139. Сказанного выше достаточно для решения всех вопросов перспективы, и мы добавим поэтому лишь несколько замечаний.

Если мы имеем картину, изображающую перспективу предмета с некоторой точки зрения, всегда можно построить схему перспективы того же предмета с той же точки зрения, но на другой картине. Действительно, так как положения глаза первой картины заданы, направление лучей зрения, проведенных от глаза ко всем точкам картины, также вполне определено, и можно легко построить их пересечение с поверхностью второй картины, положение которой известно.

Но только что сказанное не может быть применено к другой точке зрения, так как в этом случае лучи зрения не были бы определены, и простой перспективы было бы недостаточно для изображения предмета. Перспектива есть род проекции, которая отличается от обычно применяемых ортогональных тем, что она выполняется линиями, сходящимися

в точке зрения, откуда строится перспектива, тогда как в ортогональных проекциях эти линии перпендикулярны к плоскости проекции; однако мы знаем, что предмет вполне определяется только двумя проекциями; а потому при представлении предмета в перспективе для его полного изображения надо иметь две перспективы и знать точки зрения, соответствующие им обоим.⁶⁷

Мы закончим на этом наши исследования по геометрической части теории теней и перспективы. Изложенные нами способы изображения предметов охватывают приблизительно все, что может быть точно описано. Так, если заданы различные предметы, определенные их проекциями,⁶⁸ мы можем, предполагая их освещенными известным образом, построить контуры светлых и темных частей на поверхности каждого из них, а также и тени, отбрасываемые ими друг на друга, и нанести на картине заданной формы перспективы этих предметов и контуры их теней, видимые с определенной точки зрения; для завершения изображения предметов остается лишь придать их частям те оттенки, которые они имеют в действительности.

*Об определении оттенков в изображении предметов
и о воздушной перспективе*

140. Та часть теории теней и перспективы, которой нам теперь надлежит заняться, очень сложна и должна быть изучаема с гораздо большим вниманием, чем это делалось до сих пор; она требует некоторых знаний по физике и, в особенности, большого числа наблюдений.

К сожалению, художники, которым приходится непрестанно думать над этими вопросами, публикуют очень мало о результатах их размышлений об искусстве. Возможно, что многие интересные открытия и важные наблюдения остаются неизвестными и неиспользованными для народного образования вследствие того, что художники, их сделавшие, не сумели или вообще не сочли нужным их изложить в печати. Мы далеки

от мысли, что то, что мы собираемся сейчас изложить, представляет законченное учение; это лишь отдельно высказанные мысли, предназначенные к тому, чтобы открыть более или менее новые пути; мы хотели бы, чтобы из наших попыток выросли более глубокие исследования и чтобы они стали для науки началом некоторых будущих успехов.

Оттенок, который воспринимается нашим зрением от освещенного предмета, зависит, прежде всего, от собственной силы света, полученного от светящегося тела и отражаемого к нашему глазу, от способа его распределения по поверхности предмета и отражения от нее; во-вторых,—от изменений, претерпеваемых светом при прохождении воздуха или различных сред, а также от некоторых других обстоятельств. В этом порядке мы и будем рассматривать соображения, о которых будем говорить.

Начнем с определения силы света, падающего от источника света на освещенный предмет, и для простоты предположим, что имеется только одно светящееся тело, которое может быть сведено к точке. Известно, что *сила света, излучаемого светящейся точкой, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния*; очевидно, что чем дальше освещенный предмет находится от источника света, тем меньше он его получает. Это замечание не имеет большого значения в искусстве рисования, потому что тела обычно считаются освещенными солнцем. В этом случае, ввиду огромного расстояния от источника света сравнительно с расстояниями между освещенными предметами и их размерами, силу света можно считать одинаковой для всех предметов и, следовательно, не должно быть разницы и в силе света, падающего на разные части освещаемых предметов; но если мы изображаем ночную сцену, освещенную очагом или лампой, то надо принимать во внимание расстояние от источника света до освещаемых предметов и придавать большую освещенность тем, которые мы хотим изобразить более близкими к источнику света.

Только что сказанное относится лишь к освещенным частям картины; что же касается частей, погруженных в тень, то,

если мы предполагаем, что имеется только один источник света, и не принимаем во внимание возможного отражения света, — все эти части должны обладать одинаковой освещенностью, т. е. быть абсолютно черными. Это утверждение может показаться странным потому, что мы не привыкли видеть тела освещенными таким образом: днем источником света для нас является солнце, другие же тела отражают и отсылают нам солнечный свет; таким образом и там, куда не проникают прямые лучи солнца, светло, и мы не имеем случая наблюдать полную темноту; о ней мы можем составить себе представление только на основании опытов в темной комнате или, еще лучше, с солнечным микроскопом. Когда мы впускаем в темную комнату пучок солнечных лучей так, чтобы они падали на линзу, эти лучи собираются в фокусе и потом идут расходящимся пучком, образуя конус света, который проектируется в виде очень яркого круга на противоположной стене комнаты. Если поместить на этой стене белый экран и поставить на пути лучей какое-нибудь тело, заслоняющее часть лучей, тень будет казаться совершенно черной и будет ограничена резко очерченным контуром. В этом случае свет действительно исходит из одной точки — фокуса линзы, через которую проходят лучи, и отраженного света недостаточно, чтобы заметно ослабить темноту комнаты в тех ее местах, куда лучи не проникают непосредственно.

141. Рассмотрим теперь свет, отражаемый предметом к глазу наблюдателя. Если бы он распространялся в совершенно свободной среде, не испытывая никаких потерь, — два предмета одинаковой освещенности представлялись бы нашему глазу равно освещенными, независимо от их расстояния до глаза. Чтобы это понять, представим себе два одинаковых и равно освещенных круга, расположенных в плоскостях, одинаково наклоненных к лучам зрения, проведенным из глаза к их центрам; сила света, отражаемого каждым из них, будет убывать обратно пропорционально квадрату их расстояния до глаза;

но одновременно и размеры изображений, которыми представляются эти круги глазу, будут также убывать обратно пропорционально квадрату тех же расстояний. Итак, если, с одной стороны, свет, отражаемый всеми точками более удаленного круга, менее интенсивен, то, с другой стороны, он более концентрирован, в силу уменьшения изображения; так как эти два противоположных эффекта подчиняются одному закону, они уравнивают друг друга, и глаз испытывает впечатление, что оба круга, находящиеся на разных расстояниях от него, одинаково освещены.

Однако в действительности это не так, ибо воздух, в котором распространяется свет, не вполне прозрачен. Мы попытаемся в дальнейшем оценить изменения, претерпеваемые световыми лучами в силу неполной прозрачности воздуха; но мы должны сначала изучить, как ведет себя свет на поверхности освещенных тел, чтобы распределиться по ней и вернуться к глазу.

Мы разделим все поверхности на два типа в зависимости от того, как они принимают и отсылают свет: на поверхности гладкие и матовые.

Мы не знаем вполне гладких поверхностей, но мы будем считать приближением к ним те, которые образуют зеркала. Известно, что лучи света, падающие на гладкую поверхность, отражаются под углами, равными углам падения. Если свет излучается из одной единственной точки, то каждая точка гладкой поверхности получает и отражает только один луч, и из всех этих лучей только один попадает в глаз, — другие его не достигают: глаз видит только ту точку поверхности, которая отражает к нему луч, все остальное представляется ему в полной темноте, и оттого тем ярче кажется видимая точка.⁶⁸ Если поверхность, положение глаза и источник света заданы, определение блестящей точки сводится к задаче начертательной геометрии, решение которой более или менее сложно в зависимости от рода образования данной поверхности; действительно, речь идет о том, чтобы найти на этой поверх-

ности такую точку, чтобы линии, проведенные из нее к глазу и к светящейся точке, находились в плоскости, перпендикулярной к касательной плоскости, и составляли бы с ней равные углы (§ 34). Легко видеть, что если гладкая поверхность достаточно больших размеров, мы, вообще говоря, всегда найдем на ней блестящую точку. Если свет излучается из одной единственной точки, то на поверхностях плоских или обладающих в одном направлении неопределенными плоскими элементами, как поверхности цилиндрические, конические и развертываемые, так же как на поверхностях закругленных, могут образоваться только блестящие точки, но не блестящие линии или ребра. Если же свет приходит от тела конечных размеров, то многие точки гладкой поверхности отражают по направлению к глазу свои лучи, совокупность которых образует более или менее искаженное изображение светящегося тела; остальное кажется тем более черным, чем более гладкой является поверхность. Поэтому, если надо изобразить гладкое тело, необходимо, определив положение блестящей точки, сделать ее ослепительно белой, оставляя в темноте остальную часть тела.⁷⁰

Матовые поверхности, составляющие второй класс, значительно более обширный чем первый, отличаются от гладких поверхностей тем, что все их точки, в которые падают лучи от источника света, отражают их к нашему глазу, если только на пути лучей не стоит непрозрачное тело.

Нетрудно составить себе точное представление о количестве света, получаемого каждой частью любой поверхности от светящегося тела, которое мы для простоты будем считать точкой. Известно, что если пренебречь наклоном отдельных частей поверхности, сила падающего на нее света обратно пропорциональна квадрату расстояния от светящейся точки. Далее, если предположить, что эта точка является центром шара, то количество лучей, получаемых элементом освещенной поверхности, может измеряться частью сферической поверхности, заключенной в конусе, вершиной которого является светящаяся

точка и основанием — данная поверхность. Чем более этот элемент будет наклонен к падающим лучам, тем уже будет конус и тем меньше часть сферической поверхности, в ней заключенная. Можно сказать, что чем больше освещенная поверхность будет наклонена к падающим лучам, тем меньше она получит света. В математической форме эти результаты выражают словами: *для каждой точки поверхности освещенность пропорциональна синусу угла наклона луча к плоскости, касательной в этой точке, и обратно пропорциональна квадрату расстояния до светящейся точки.*

Труднее оценить удовлетворительным образом, как происходит отражение света матовыми поверхностями и какое количество его каждая часть поверхности отсылает к глазу. Этот вопрос зависит от физического строения поверхности тела, и наши знания по физике еще слишком несовершенны, чтобы снабдить нас данными, нужными для решения этого вопроса; все, что мы сможем сказать, будет основано лишь на гипотезах; наши результаты будут только вероятными, и мы их предлагаем здесь лишь до тех пор, пока они не будут заменены другими, основанными на более точной теории.

Мы допустим, что каждая молекула, принадлежащая матовой поверхности, ведет себя аналогично светящейся точке, отражая по всем направлениям ту часть получаемого ею света, которую она не поглощает. Понятно, что молекулы образуют бесчисленное количество неровностей, которые становятся для нас ощутительными тем, что тело нам представляется матовым, но они не мешают его поверхности казаться нашему глазу сплошной и непрерывной. Согласно этой гипотезе, каждая молекула, находящаяся на поверхности тела, отражает к нам луч света. Рассмотрим элемент поверхности; мы уже видели, что расстояние, на котором он от нас находится, влияет на величину его изображения, но не на его видимую яркость, по крайней мере, поскольку мы не принимаем во внимание

изменений, претерпеваемых светом в силу неполной прозрачности воздуха, на его пути. Совокупность лучей, отраженных всеми точками этого элемента и направленных к глазу, образует конус, основанием которого является данный элемент поверхности, и вершиной глаз; число лучей, заключенных в этом конусе, пропорционально площади элемента поверхности. Если построить шар, для которого глаз был бы центром, и радиусом — расстояние между глазом и основанием конуса, то часть сферической поверхности, заключенная в конусе, будет мерой телесного угла, заполненного лучами. Сила света, достигающего глаза, может быть оценена отношением площади рассматриваемого элемента поверхности к площади этой части поверхности шара.

В то время как площадь выбранного элемента освещенной поверхности остается постоянной, площадь соответствующей части сферической поверхности будет тем меньше, чем острее угол, составляемый этим элементом с лучами зрения; итак, сила света, отраженного матовой поверхностью, будет тем меньше, чем больше эта поверхность приближается к перпендикулярности лучам зрения, отсылаемым нам ею; это может быть выражено следующим образом в математической форме: *для каждого элемента поверхности сила отраженного света обратно пропорциональна синусу угла, составленного касательной плоскостью с лучом зрения.*

Этот результат нельзя считать вполне точным, когда угол, о котором идет речь, близок к нулю; в этом случае неровности матовой поверхности частично перекрывают друг друга и заслоняют от нас, таким образом, часть света, которую они должны были отразить к нам. Итак, рассматривая плоскую матовую поверхность под очень острым углом, мы не будем видеть ее очень яркой, как это видно из данного нами аналитического выражения; в этом случае это выражение становится не точным, так как оно не учитывает небольших неровностей, которыми покрыта поверхность, и отношений их размеров к взаимным расстояниям.

Для подтверждения этого результата мы приведем замечательный пример.

Луну можно рассматривать как матовое тело, освещенное солнцем, лучи которого она к нам отсылает. Если бы луна была окружена атмосферой, то лучи, исходящие от краев ее диска, должны были бы проходить большую толщу, чем лучи, исходящие из центра луны, и достигали бы до нас ослабленными по сравнению с последними. Но астрономические наблюдения показывают, что луна не имеет заметной атмосферы; в силу ее сферической формы мы должны видеть под тем же углом зрения большие площади поверхности около ее краев, чем в центре; следовательно, мы должны получать от краев больше отраженных лучей, и края должны нам казаться сильнее освещенными; наблюдения подтверждают, что поверхность луны кажется более яркой по краям, нежели в центре ее диска.

Мы видим в природе большое число тел, поверхности которых являются промежуточными между двумя рассмотренными нами крайними классами и, как показывает опыт, обладают до известной степени свойствами как гладких, так и матовых поверхностей. Относительно этих тел можно предположить, что молекулы их внешней поверхности представляют собой маленькие более или менее гладкие шарики, частично отражающие свет подобно гладким поверхностям, и тем более заключенные в самый объем тела, чем более гладким оно нам представляется. Если бы они были изолированы, каждая из них имела бы блестящую точку; однако, так как мы видим только часть контура этих молекул, мы не на всех их можем видеть эту точку; таким свойством обладают только те из них, у которых блестящая точка попадает на их передний и видимый сегмент, сливающийся с общей поверхностью тела. Отсюда можно заключить, что если рассматривать поверхность данного тела, как непрерывную, и искать на ней положение блестящей точки, как мы это сделали в случае гладкого тела, мы нашли бы подобие центра той части поверхности, где находятся гладкие

молекулы, способные образовывать блестящие точки; и мы заметим, что эта блестящая часть будет тем более протяженной, чем более блестящими будут молекулы, о которых идет речь, или чем менее гладким будет тело; другими словами можно сказать, что для тел, не совершенно гладких, блестящая точка расширяется и распространяется, ослабевая на тем большую площадь, чем менее гладкой является поверхность. На остальной части рассматриваемого тела молекулы отсылают к нам свет только подобно вполне матовым телам, и к ним применимо все, что мы говорили по этому поводу.

До сих пор мы рассматривали только силу света, с которой он достигает освещенного тела, распределяется по нему и отражается, чтобы попасть в глаз наблюдателя; мы не принимали во внимание ни изменений, претерпеваемых светом при прохождении разных сред на его пути, ни эффекта других причин, действующих на силу света; теперь мы рассмотрим изменения, вызываемые этими различными причинами.

142. Воздух, сквозь который проходят лучи света, прежде чем дойти до нас, не является вполне прозрачным; его молекулы, подобно непрозрачным телам, задерживают некоторые лучи света и отражают их. Этот эффект, не чувствительный для близких объектов, становится очень заметным для удаленных; он проявляется как в освещенных, так и в темных частях тела; он уменьшает освещенность первых и тень последних и изменяет цвет предметов.

Свет, отраженный молекулами воздуха, обладает определенным цветом; воздух, как и все другие тела в природе, имеет свой собственный цвет; это то, что составляет синеву того, что мы называем *небом*. Если бы воздуха не существовало или он не отражал бы света, небо казалось бы нам абсолютно черным, покрытым блестящими точками светил. Синева неба тем прозрачнее, чем менее влажен воздух; по этой причине небо в южных странах обычно более лазурное, чем на севере.

Итак, если пучок света проходит достаточно значительную толщу воздуха, он теряет по пути часть лучей, из которых состоит и, следовательно, часть своей силы.

Это замечание важно не столько при рассмотрении пути луча от источника света до освещаемого тела, сколько на его обратном пути от предмета к глазу, когда он является лучом зрения. Действительно, до всех тел, освещенных солнцем и представляющихся нашему взору в один определенный момент времени, лучи проходят приблизительно равный слой воздуха, и потеря света на этом пути более или менее одинаково уменьшит освещенность их всех. Но бывают обстоятельства, при которых существенно принять во внимание это ослабление света; например, чтобы изобразить на картине эффект восходящего солнца, художник должен принять во внимание, что свет, проходящий в данном случае большую горизонтальную толщу атмосферы прежде, чем осветить окрашиваемые им предметы, обладает значительно меньшей силой и яркостью, чем в середине дня.

Но особенно существенно исследовать, как промежуточная масса воздуха влияет на свет на его пути от освещенного предмета к глазу. Надо учитывать, что не только теряется часть лучей, отраженных предметом, но и что молекулы промежуточного слоя воздуха также освещаются прямыми лучами света, которые они отражают в своем собственном цвете и по тому же направлению, какое имеют лучи, идущие от освещенного предмета к глазу. Таким образом, ощущение, вызываемое этим предметом в глазу наблюдателя, будет изменено: во-первых, потому, что часть лучей, долженствующих вызвать это ощущение, не доходит до глаза и, во-вторых, потому, что к основным лучам примешиваются посторонние лучи голубоватого цвета.

Этот эффект тем более заметен, чем значительнее масса промежуточного воздуха; можно принять как принцип, что по мере возрастания расстояния от освещенных предметов до нашего глаза, их освещенность падает, и к их

собственному цвету примешивается все больше голубого цвета атмосферы.

Аналогичное явление имеет место для предметов, находящихся в тени. При наличии только одной светящейся точки и при отсутствии атмосферы, тень была бы абсолютно черной; но окружающие предметы, в особенности самый воздух, освещают до известной степени части тела, не получающие прямого света, и, таким образом, их формы тоже становятся видимыми для глаза. Далее, лучи, которые эти неосвещенные прямым светом части тела могут посылать нам, также частично задерживаются молекулами промежуточного воздуха; эти молекулы получают и отражают к нашему глазу и другие лучи, которые доходят до нас в том же направлении, где расположена относительно нас тень, и которые ослабляют эту тень, примешивая к ней синеватый оттенок; таким образом, можно также заключить, что чем больше удалены от нас неосвещенные предметы, тем больше теряет в своей интенсивности тень, приближаясь к окраске атмосферы.

Рассмотрим два ряда одинаковых предметов, простирающихся на большое расстояние: пусть один из них состоит из освещенных предметов, другой из предметов, погруженных в тень. Освещенность предметов, составляющих первый ряд, будет ослабевать по мере их удаления; если предположить, что они белого цвета, то их белизна будет становиться менее яркой и будет, кроме того, изменять свой цвет совсем незаметным образом при переходе от одного предмета к соседнему, и весьма ощутимо на протяжении всего ряда она приобретет голубоватый оттенок; в то же время тень предметов, составляющих второй ряд, будет ослабевать в интенсивности, приближаясь однако не к белому, но к голубому цвету. Если оба ряда рассматриваемых предметов простираются исключительно далеко, то наступит такой момент, когда белизна освещенных предметов и чернота находящихся в тени, все время убывающая с переходом в синеву, сольются в цвете атмосферы. Мы наблюдаем подобное явление, рассматривая высокие горы на расстоянии

двадцати пяти или тридцати льё; их покрытые снегом и сверкающие вершины, их сильные тени, столь резко выраженные при рассматривании с небольшого расстояния в ясный день, — все почти совсем гаснет и растворяется в лазури неба.

Так, когда хотят дать почувствовать на картине расстояние, разделяющее два предмета, находящиеся на различном удалении, принято писать более удаленный из них менее живыми красками, уменьшая свет и ослабляя интенсивность теней, и когда надо изобразить весьма удаленные предметы, их окраска должна принимать общий снеговатый оттенок.

Этот принцип хорошо известен, и им даже часто злоупотребляют, о чем полезно здесь упомянуть. Из сказанного нами следует, что лишь в тех случаях, когда разница между расстояниями от различных предметов до нашего глаза значительна, становится заметной и разница в эффекте промежуточной массы воздуха на свет, отражаемый к нам предметами. Если перед нами, например, архитектурный фасад, часть которого образует выступ, выдвинутый на один метр перед остальным зданием, то этот дополнительный слой воздуха, толщиной в один метр, на пути лучей зрения, идущих от задней части фасада здания, не может вызвать никакого их ослабления или, по крайней мере, столь ничтожное, что наш глаз не может его заметить. Следовательно, если выступ и задний фасад параллельны между собой и одинаково освещены, нет никаких оснований придавать их изображениям разные оттенки, как это делают многие художники: эти части здания представляются нам одинаково освещенными и так и должны быть изображены.

Однако мы прекрасно отличаем в действительности, что одна часть выступает относительно другой; для этого даже нет необходимости, чтобы передний фасад отбрасывал тень на задний; даже в том случае, когда направление солнечных лучей и положение глаза таково, что никакой тени не образуется, мы без труда различаем, какая часть здания образует первый план. Важно представить себе, что руководит в этом

случае нашим суждением, чтобы уметь подражать этому явлению, и чтобы художник мог воздействовать на глаз зрителя теми же средствами, как это делает природа.

Представим себе опять архитектурный фасад с выступом, выкрашенный равномерно одним цветом. Если мы поместим какое-нибудь препятствие, например доску, чтобы она закрывала от нас ребро, которым заканчивается выступ здания, для нас окажется невозможным решить, какая из двух его частей расположена ближе к нам; но, как только мы устраним это препятствие, все сомнения отпадут. Этот чрезвычайно простой опыт показывает нам, что именно способ воздействия света на крайнее ребро выступа и свидетельствует нам о его существовании. Если бы ребро, о котором идет речь, было математической прямой линией, свет не мог бы оказывать на него никакого влияния, или лишь совершенно незаметное, и мы тоже не могли бы различить выступа на фоне здания. Но это ребро никогда не бывает резким, никогда не бывает математической прямой: материалы, из которых оно состоит, не обладают абсолютной плотностью, и инструменты, которыми материалы обрабатываются, не совершенны; обтесывание камней производится без особых предосторожностей, и, выходя из рук каменщика, ребро далеко не имеет точной формы. Далее, вследствие возможных ударов или просто трения, ребро должно еще больше иступиться и в конце концов из острого стать закругленной поверхностью, которую можно рассматривать как часть кругового вертикального цилиндра очень малого радиуса; благодаря способу, которым свет воздействует на эту цилиндрическую поверхность и потом отражает к нашему глазу, существование выступа нам и становится заметным.

Выше мы показали, что каждая часть кривой поверхности получает тем больше света, чем прямее она стоит по отношению к лучам, и что свет, отсылаемый ею обратно к глазу, будет тем интенсивнее, чем больше эта поверхность будет наклонена к лучу зрения. Согласно этому принципу, на маленькой цилиндрической поверхности, которую представляет собой

ребро, более освещенная часть должна находиться с той стороны, откуда приходит свет; и с другой стороны ребра — часть менее освещенная, чем фасад зрения, причем все это будет зависеть от положения глаза и направления световых лучей.

Поэтому, чтобы дать почувствовать в приведенном примере, что часть здания образует выступ, нужно провести у ребер, расположенных со стороны тени, немного менее светлую линию, и у тех, которые расположены со стороны света, линию более освещенную; но в остальном оттенок окраски двух параллельных плоскостей, составляющих фасад, должен быть одинаковым.

Мы должны добавить еще несколько замечаний, основанных на других соображениях.

Наши органы чувств обладают известными свойствами, изменяющими передаваемые ими ощущения. Орган зрения, например, продлевает ощущение сравнительно с временем, в продолжение которого он его испытывает, что доказывается хорошо известным опытом. Если быстро двигать горящий раскаленный уголь, на конце палки, то глазу представляется не уголь, занимающий последовательно разные положения, но непрерывная полоса огня.

Тот же орган обладает еще другим свойством: расширять, увеличивать предметы тем более, чем сильнее они освещены; приведем поразительный пример. Через несколько дней после новолуния, когда луна приближается к своей первой четверти, она видна на горизонте вскоре после захода солнца; только около четверти ее диска освещено, однако неосвещенная часть получает, вследствие отражения, некоторый свет от земли и потому она видна; освещенная часть тогда представляется гораздо большего диаметра, чем затемненная, и кажется, что между кривизной одной и другой частей существует значительная разница. В период последней четверти, перед восходом солнца, это явление возобновляется; но сейчас часть луны, погруженная в тень в первой четверти, будет освещенной, и будет

казаться, в свою очередь, большей чем другая, теперь темная. Многие опыты подтверждают эту способность глаза увеличивать размеры белых и освещенных предметов за счет затененных; приведем наиболее простой пример: если мы положим в ряд несколько параллельных полос, равных по ширине, но попеременно черных и белых, и будем рассматривать их с некоторого расстояния, белые полосы будут казаться значительно шире черных.

Третье свойство глаза, являющееся общим и для других органов чувств, состоит в том, что вообще сильные ощущения ослабляют на мгновение восприятие более слабых ощущений. Так, артиллерист, только что слышавший выстрел батареи, не чувствителен к впечатлению от незначительного шума. Случается даже, что сильное ощущение, испытанное одним органом, совсем заглушает ощущение, полученное другим, менее чувствительным органом. Прежде чем выпить ликер, мы ощущаем его запах; но обоняние сразу уже становится нечувствительным к нему после того, как мы выпили несколько капель; сильное ощущение испытанное нёбом, совершенно стирает чувствительность обоняния. Этот эффект сильных впечатлений очень значителен для органа зрения: блестящие предметы делают нас нечувствительными к менее освещенным; когда мы переходим с яркого света в мало освещенное помещение, мы в первые мгновения не различаем ничего и с трудом узнаем людей, оказывающихся в непосредственном соседстве; но постепенно зрение привыкает к этому слабому свету, и, через некоторое время, можно даже читать достаточно мелкую печать. Правда, при переходе из света в темноту, зрачок глаза расширяется и принимает, таким образом, большее число лучей; но это расширение зрачка происходит мгновенно и не оно является причиной только что описанного явления; причина в том, что глаз лишь очень медленно теряет сильное впечатление от яркого света.

Применяя эти замечания к определению отблеска, который мы должны изобразить на освещенном ребре здания, мы заклю-

чим, что этот отблеск будет казаться глазу несколько шире, чем он есть в действительности, и что смежные части будут казаться немного более темными. Чтобы воспроизвести это явление, столь существенное для правильности картины, надо придать отблеску несколько большую ширину и оттенить его справа и слева не широким немного более темным оттенком. Если бы мы имели в нашем распоряжении такие же живые краски, какие существуют в природе, и если бы мы могли изобразить отблеск столь же ослепительно белым, как это имеет место в действительности, мы не были бы принуждены увеличивать его ширину или несколько усиливать его при помощи более темных оттенков по сторонам; точная копия действительности произвела бы на наш глаз такое же впечатление, как и самый предмет; но мы должны компенсировать некоторым, для нас несложным, преувеличением несовершенство наших способов подражания.

Об изменениях цветов при некоторых обстоятельствах

143. После рассмотрения изменений, испытываемых светом главным образом в его абсолютной интенсивности, независимо от его цвета, нам остается рассмотреть, какие изменения испытывают самые цвета под действием различных причин. Этот вопрос соприкасается с той частью оптики, которая изучает окрашенный свет; она слишком обширна, чтобы мы могли охватить ее целиком, и мы ограничимся только небольшим числом замечаний, которые находят частое применение.

Одна из главных причин изменений, испытываемых цветами предметов, лежит в самой природе светящихся тел; так, полевой василек — синий днем — кажется фиолетовым при свете свечи; при том же освещении зелень листьев и растений становится значительно темнее, и желтый цвет приближается к белому с розоватым оттенком; по этой же причине люди, цвет лица у которых недостаточно белый, лучше выглядят при вечернем освещении.

Но изменения, наблюдаемые в цветах, зависят не только от природы света, прямого или отраженного, которым освещены предметы; они часто связаны с неточной оценкой, даваемой нами цвету в тех случаях, когда наше суждение оказывается, так сказать, обманутым, благодаря особым обстоятельствам; мы приведем здесь несколько примеров.

Если мы сидим утром, перед восходом солнца, при прекрасном голубом небе у открытого окна, и перед нами на столе горит свеча и лежит лист бумаги, то бумага будет освещена одновременно свечой и светом, уже разлитым в атмосфере, который посылает нам воздух. Если мы при этих обстоятельствах поместим какое-нибудь тело так, чтобы оно заслонило часть лучей, идущих от свечи на бумагу, то падающая на нее тень будет освещена только атмосферой; она покажется нам голубой, что и есть на самом деле, потому что свет, отраженный атмосферой — голубой; но если мы погасим свечу и бумага будет целиком освещена только этим голубым светом, мы тем не менее не поколеблемся назвать эту бумагу белой; если рядом находится другой лист бумаги голубого оттенка, он нам покажется таким же белым, как и первый.

Предположим еще, что мы находимся в комнате с окнами, обращенными на солнце, и мы закроем их красными занавесками; тогда вся комната будет освещена красным светом; через несколько мгновений глаз, привыкнув к красноватому оттенку на всех предметах, признает белыми предметы, действительно являющиеся таковыми, и будет также считать белыми предметы такие же красные как занавески. Но это не все: если в занавеске имеется отверстие диаметром в три или четыре миллиметра, и если к этому отверстию поднести на некотором расстоянии белую бумагу так, чтобы на нее упал пучок проходящих через него лучей, эти лучи изобразят на белой бумаге зеленое пятно; если бы занавески были зелеными, пятно было бы красным.

Мы не можем здесь объяснить, почему пятно будет зеленым в первом случае и красным во втором, потому что это

явление зависят от теории состава света; но мы попытаемся изложить, как это происходит, что в комнате, освещенной красным светом, белый предмет все же кажется белым, так же как и красный предмет, и почему белый свет солнечных лучей, не испытывающий никаких изменений, так как он проходит через отверстие в занавеске и падает на белую бумагу, все же кажется совсем другого цвета.

Нам придется предпослать тому, что мы хотим сказать по этому поводу, несколько соображений о роли, которую вообще играет белый цвет в зрении.

Когда мы смотрим на тело любого цвета, каждая молекула его видимой поверхности посылает нам вместе с лучами, имеющими окраску тела, также и белые лучи.

Чем больше мы получаем лучей такого рода, тем более освещенным нам представляется предмет и тем более ярким его цвет. Мы знаем киноварь, смесь из серы и ртути, из которой получается яркая красная краска, применяемая в окраске церковных оконных стекол; в массе киноварь имеет достаточно тусклый коричневато-красный цвет, подобный сильно обожженному кирпичу; но по мере того как ее растирают, она теряет этот мрачный темный цвет; в растертом виде она обладает большей поверхностью и посылает нам белый свет из большего числа точек; наконец, когда она растерта в мельчайший порошок, она становится ослепительно красной. Каждая молекула киновари посылает глазу больше или меньше белого света, но, когда молекулы могут отражать его в максимальном количестве, вещество принимает более яркий цвет. Подобным образом, если мы рассматриваем шляпу, то каждый волосок ее фетра представляет собой маленький цилиндр, у которого в микроскоп виден белый край, подобный тому, который замечен на палочке сургуча при ярком дневном свете: этот край посылает нашему глазу белый свет. Только что сказанное по поводу двух примеров справедливо по отношению ко всем телам природы, именно белый свет, отраженный от всех видимых точек и определяет в основном оттенок освещенности, свойственный

каждой части рассматриваемого предмета, ибо белые лучи являются наиболее полными и яркими из всех, посылаемых нам молекулами; это они, следовательно, дают нам лучшее познание формы предметов, оценку наклона каждого элемента и кривизну в каждой точке поверхности. Мы привыкли к большому изобилию белого света и к услугам, оказываемым им зрению, и относительно него мы и оцениваем окрашенный свет.

Итак, если предметы освещены только окрашенным светом, если, как мы это только что предположили, красные занавески или стекла придают эту окраску всякому свету, посылаемому солнцем в это комнату, то мы будем судить о форме предметов уже не при помощи белого света, ибо белые лучи, которые отражал бы каждый предмет, если бы свет не был изменен, становятся теперь красными лучами. Все же эти лучи, наиболее полные и яркие из всех, которые доходят до нас, и, хотя наш глаз воспринимает их иным образом, он основывает на них свое суждение, как он делал бы это, будь они белыми; поэтому он естественно принужден считать их белыми, и оценивать цвета других лучей из сравнения с ними. Отсюда видно, что если в комнате находится предмет, такой же красный как и самый свет, освещающий комнату, этот предмет, отсылая нам лучи той же природы, как те, которые кажутся нам белыми, нам покажется также белым. Легко проверить этот опыт, рассматривая через красное стекло белые и красные предметы; и те и другие покажутся нам белыми.

Та же причина, которая заставляет нас считать белыми лучи, не являющиеся таковыми на самом деле, не позволяет нам признавать белыми действительно белые лучи, и потому естественный свет солнца, проходящий через маленькое отверстие в красной занавеске, покажется нам на белой бумаге цветом, существенно отличным от белого.

Замечания, высказанные нами при рассмотрении этих частных случаев, легко могут быть обобщены и распространены на все

случаи, когда свет, освещающий тела, не таков, каким мы его обычно получаем от солнца. Понятно, насколько существенно принимать это во внимание, в особенности если речь идет об изображении красками предмета, освещенного лишь отраженным или измененным, благодаря прохождению через прозрачные среды, светом.

Почти всегда отраженный свет несет отпечаток цвета отражающего тела: это изменение цвета влияет на видимую окраску освещенного предмета и на суждение, выносимое нами о соотношении этих цветов.⁷¹

П Р И Л О Ж Е Н И Е





ГАСПАР МОНЖ И ЕГО „НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ“



Полтора́ста лет минуло со времени опубликования во Франции Гаспаром Монжем его „Начертательной геометрии“ (*Géométrie descriptive*, 1795). С тех пор новая наука, вызванная к жизни гением Монжа, благодаря назревшей потребности со стороны инженерной строительной техники, стала быстро распространяться не только во Франции, но и в других странах. Она прочно укрепилась в высшей технической и художественной школах как основная учебная дисциплина, без которой немыслимо образование инженера, архитектора и художника. Впервые работа Монжа была напечатана именно как учебное пособие. Своего значения его начертательная геометрия не потеряла до сих пор, и в наши дни она составляет основную часть учебного курса методов изображений.

На примере начертательной геометрии сказался общий характер разносторонней деятельности Монжа: его глубокий исследовательский ум,двигающий вперед науку, и кипучая разнообразная работа, направленная на приложение его теории к практике.

Биографы характеризуют Монжа как неутомимого ученого, педагога, инженера, энергичного общественного и политического деятеля крупного государственного масштаба.

Монж (1746—1818) — внук крестьянина, родился в семье мелкого торговца провинциального города Бон. Уже на школь-

ной скамье он обнаружил выдающиеся способности, благодаря которым был принят в Мезьерскую школу (L'école de Mézière). Однако в этой самой школе он хорошо почувствовал на себе, что значит быть выходцем из третьего сословия. Он не имел равноправного места в офицерской инженерной школе среди сыновей знатных родовитых семейств. Ему пришлось устроиться только на вспомогательное унтер-офицерское отделение, подготавливавшее военных кондукторов, — в „Гипсовом училище“, как называли в насмешку это отделение, так как ученики его должны были изготавливать из гипса модели сводов и других строительных конструкций.

Такое положение, несмотря на искусное мастерство Монжа, не могло его удовлетворять: его занимали научные вопросы.

Расчеты дефиле проектируемой крепости сопровождались утомительными вычислениями. Монж заменил это геометрическим методом, при помощи которого легко, быстро и непосредственно решал задачи. Не без труда он добился признания предложенного им способа. Успех этот доставил ему место репетитора по курсу математики (1765).

Продолжая свои изыскания, Монж дал общий метод решения стереометрических задач посредством геометрических построений на плоскости, который он назвал начертательной геометрией (*Géométrie descriptive*) и начал писать курс этой науки для Мезьерской школы. Ему было запрещено что-либо публиковать из боязни, что иностранцы могут воспользоваться достижениями французской науки в ущерб Франции. Даже в самой Франции этот метод имел ограниченное применение.

Более 20 лет этот основной его труд не видел света.

За это время Монж создал другой свой крупный труд, относящийся к теории поверхностей: „Приложение анализа к геометрии“ (*Application de l'Analyse à la Géométrie*), который предварительно печатался в 1795 г. отдельными тетрадями для студентов Политехнической школы: „*Feuilles d'analyse*

appliquée à la géométrie". В этой работе Монж рассматривает поверхности с точки зрения образования их движением линий.

Свой труд он сопровождает изложением собственной теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка и решением задачи о колебаниях струны.

В двадцать два года (1768) Монж был уже профессором математики, а через три года к нему перешла также и кафедра физики. Женитьба Монжа (1771) сделала его владельцем металлургического завода, где он применил на практике свои инженерные таланты. В 1780 г. Тюрго основал в Лувре кафедру гидравлики и для замещения ее привлек Монжа. В том же году, т. е. в возрасте 34 лет, он был избран Парижской Академией наук в число ее членов. Около этого времени он написал для Морской школы (l'École de marine) известный свой „Курс статики“ (Traité de statique), который был принят для обучения в Политехнической школе. В период времени 1770—1790 гг. Монж сотрудничал в Мемуарах Туринской и Парижской Академий наук и других научных журналах. Среди статей его надлежит отметить „Теорию выемок и насыпей“ (Mémoire sur la théorie des déblais et des remlais, 1781), в которой изложено замечательно изящное исследование, касающееся проблемы земляных работ, связанное с главными исследованиями Монжа о линиях кривизны поверхностей.

О характере геометрической школы Монжа Феликс Клейн (Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert, 1926), говорит, что „в ней естественнейшим образом увязано живое пространственное восприятие с аналитическими представлениями. Аналитическая форма является не самоцелью, а только кратчайшей формулировкой фактически воспринимаемых пространственных соотношений; ее дальнейшее развитие производится на основе пространственных построений“. О труде Монжа „Приложение анализа к геометрии“ Клейн отзывается с восхищением и заявляет, что этот труд „читается, как роман, т. е. отличается связным, ясным (отнодь

не построенным по старой схеме: предпосылки, утверждение, доказательство) и плавным изложением. Из элементарных формул свободным взлетом фантазии разворачивается масса геометрических рассуждений, которые прежде всего прилагаются к проблемам, выдвигаемым природой“.

Изучая технику металлургии на своем заводе, Монж углубился в сторону физики и химии. Работы его в этих областях ставят его в ряд крупнейших физиков и химиков того времени. Работая по химии, он сблизился с знаменитым Бертолле.

Вторую половину своей сознательной жизни Монж отдал новой Франции. Революция застала его в возрасте 43 лет в полном расцвете сил. Он был общепризнанным сложившимся ученым, выдающимся педагогом. Революцию он встретил восторженно. Ей он отдал все свои силы. Совместно с первоклассными учеными того времени — Лавуазье, Лапласом, Борда, Кулоном, Бриссоном, Даламбером, Лагранжем и другими Монж в 1790 г. принимал участие в Комиссии по введению метрической системы мер и весов.

По предложению Кондорсе, Монж вошел в состав первого революционного правительства — Временного исполнительного совета — и согласился принять на себя руководство морским министерством; в весьма сложной и трудной обстановке он осуществлял это руководство в продолжение восьми месяцев.

Ученый-патриот Монж был и пламенным революционером, достойным членом Якобинского клуба. В конце 1793 г., после строгой чистки Монж был оставлен членом Якобинского клуба, был затем его секретарем, а впоследствии и вице-председателем. Во времена Конвента Монж выполнял ответственные поручения. Его подпись среди подписей других членов Исполнительного совета скрепляла акты, относящиеся к казни Людовика XVI.

Молодая республика, окруженная врагами извне и борясь с контрреволюционными мятежами внутри, напрягала силы для победы над ними. Конвент издал декрет о мобилизации всего населения. Комитет общественного спасения обратился к уче-



Г. Монж.

ным, взывая к их патриотизму, требовал, чтобы они выступили на защиту родины и участвовали в создании военной промышленности. Отрезанная от внешнего мира, Франция вынуждена была организовать собственное военное производство. Стране нужны были материалы для обороны Республики и вооружения. Арсеналы были пусты. Франция не производила ни селитры, ни меди. Отечественные заводы не знали способа изготовления стали. Монж, его друг Бертолле, Лагранж, Карно и другие крупнейшие ученые первые предложили родине свои услуги. Монж тотчас же окунулся с головой в работу, трудясь дни и ночи совместно со своими коллегами, создавая новые процессы быстрого изготовления пороха и оружия, открывая по всей Франции многочисленные заводы и мастерские. Он подал мысль добывать селитру из отечественной почвы — в конюшнях, в подвалах, в мусорных кучах. В одном только Париже было организовано более шестидесяти селитряных заводов. За девять месяцев добыча селитры превзошла в двенадцать раз прежнюю годовую производительность.

Опыт собственного металлургического завода был использован Монжем в самых широких размерах. Он написал „Наставление для рабочих металлистов о производстве стали“ (*Avis aux ouvriers en fer sur la fabrication de l'acier*, 1793); он читал лекции о производстве пушек в организованной им школе оружейников и написал труд: „Описание способа производства пушек“ (*Description de l'art de fabriquer de canons*, 1794); улучшил способ обточки и сверления их. Число пушечных заводов возросло в восемь раз, а производительность достигла до 13 000 орудий. Одна парижская фабрика давала 140 000 ружей в год.

Усилия нации обеспечили победу республиканской французской армии над коалицией интервентов. Во главе революционных армий находился Карно — достойный ученик Монжа по Мезьерской школе.

После падения якобинской диктатуры Монж вынужден был некоторое время скрываться, но вскоре, по ходатайству его

зятя Эшассерье, члена Конвента, получил амнистию, так как новое правительство нуждалось в его знаниях и опыте. Монж возвратился к своим научным занятиям.

В 1794 г. была создана Нормальная школа (*l'École normale*), являвшаяся краткосрочными курсами для „революционной переподготовки граждан-специалистов“. Монж, в качестве профессора этой школы, взял на себя впервые открытое преподавание начертательной геометрии. Покров секретности был снят с этой науки, и Монж принял решение опубликовать новый метод исследования и решения стереометрических задач, что и было сделано им в 1795 г. в форме тех кратких записей, которые он излагал своим ученикам. Лекции проводились в амфитеатре Ботанического сада, а практические занятия по начертательной геометрии в чертежных залах под сводами Сорбонны. Монж открыл свои лекции 19 января 1795 г. программной речью, в которой он самым убедительным образом доказывал необходимость открытого обучения.

Еще 11 марта 1794 г., когда у власти стояли якобинцы, Конвент постановил организовать Центральную школу общественных работ (*L'École centrale des travaux publics*). Школа была открыта в ноябре 1794 г. при содействии Монжа, Карно, Леканта, Пуираро. В сентябре 1795 г. она была преобразована в Политехническую школу (*L'École polytechnique*). Имя Монжа неразрывно связано с Политехнической школой как одного из основателей этого учебного заведения. В продолжение двадцати лет он был ее руководителем. В ней он читал, кроме начертательной геометрии, и другие предметы, в том числе свои прекрасные лекции по теории поверхностей.

В 1796 г. Монж надолго прерывает свою работу в Политехнической школе и отправляется в Италию, где выполняет правительственные поручения. В Италии он познакомился с генералом Бонапартом.

В 1797 г. популярность Монжа была так высока, что его выдвигали даже в члены Директории, но он не мог быть избран вследствие пребывания его в это время в Италии.

В следующем году Монж, в качестве одного из комиссаров Директории, снова уезжает в Италию для расследования обстоятельств убийства французского генерала Дюфо.

Наполеон высоко ценил Монжа и предложил ему примкнуть к Египетской экспедиции. Летом 1798 г. Монж, вместе с Бертолле, присоединился к этой экспедиции.

На корабле Монж читал лекции по астрономии Наполеону и его генералам. Во всех тяготах военного похода, в опасные моменты Монж проявлял большое мужество, не переставая в то же время заниматься научными вопросами. Монж первый объяснил явление миражей. Свое исследование он поместил в журнале „Египетская декада“, издававшемся Каирской академией, организованной Монжем (L'Institut de Cairo). Он получил звание президента этой академии. За исследование раскопок руин города Пелузиума Монж впоследствии получил титул графа Пелузского.

Монж и Бертолле сопровождали Бонапарта в Сирию. В 1799 г. они возвратились вместе с Бонапартом во Францию. Монж занялся разработкой и приведением в порядок драгоценных документов, привезенных из экспедиции. Он снова занял профессорское место в Политехнической школе и вел преподавание до 1809 г. Окончательно он оставил школу в 1815 г.

Переворот 18 брюмера был встречен Монжем одобрительно. Он видел в нем поворот, благоприятный для Франции. Монж был осыпан почестями и милостями, но не переставал быть независимым в своих мнениях. Он боролся против казарменного строя, введенного Наполеоном в Политехнической школе, заступался за учеников, демонстрировавших против самого Наполеона.

С падением Наполеона положение Монжа резко изменилось. Реакция не простила Монжу его прошлого, и ему приходилось скрываться у друзей. Он был лишен всех наград и даже звания академика. Больной, с помутившимся разумом, он скончался 28 июля 1818 г. Память о Монже не могла быть вытравлена. Живым памятником его деятельности оставалась Политехни-

ческая школа и многие ученые Франции — его ученики. В день столетия со дня его рождения знаменитый Араго сделал доклад в Академии наук о жизни и деятельности Монжа.

Главным научным трудом Монжа, поистине, считается его „Начертательная геометрия“.

До Монжа строители, художники и ученые обладали довольно значительными сведениями о проекционных методах, но только Монж создал начертательную геометрию как науку.

Еще в древнем Египте при постройке зданий, при межевании плодородных земель, омываемых Нилом, в живописи при расписывании стен и на колоннах зданий, работая над стенными барельефами, прибегали к элементарным проекционным приемам. Об этом свидетельствуют сохранившиеся планы египетских городов, планы и фасады зданий и поместий. Зачатки науки о перспективе мы видим у античных народов („Оптика“ Евклида, около 300 лет до н. э.). В трудах Витрувия (11 г. до н. э.) находим указания о способах изображения архитектурных проектов в плане, и о перспективном изображении здания. Большой научный прогресс в этой области совершился в эпоху Возрождения. В трудах Пьетро-делла-Франческо дель Борго, Лоренцо Гиберти, Леона Баттисти Альберти, Леонардо да-Винчи, Виатора, Альбрехта Дюрера, Микель Анджело, Виньоля и других заложены основные теоретические положения, которыми должна руководствоваться практика построения перспективных изображений; в них указаны условия выполнения таких изображений (монокулярность зрения, закрепленность точки зрения и поверхности картины, единство физического момента времени). Альбрехт Дюрер дал правила построения перспективы, связав ее с другим методом — с ортогональными проекциями.

Вопросам проектирования самых трудных частей сооружений (сводов) посвящены труды Филиберта Делорма (1576),

Жусса (1642), Дешаля (1672), Франсуа Деранда (1643). Особенно обстоятельное сочинение о правилах разрезки камней дал предшественник Монжа — военный инженер Фрезье (1638).

Художников, таким образом, интересовали правила построения перспективных изображений, т. е. изображений, обладающих максимальной наглядностью. Все усилия их шли по пути создания законов таких изображений. Вопросы метрического характера стояли у них на втором плане.

Строителей занимали те изображения, по которым можно было бы создавать здания, храмы, мосты, крепости и другие сооружения, т. е. такие изображения, которые обладали бы измеримостью. Этим условиям удовлетворяют ортогональные проекции. Наглядные изображения занимали второе место. Их, в большинстве случаев, могла удовлетворить „вольная перспектива“, т. е. аксонометрические проекции.

Художники-архитекторы нуждались во всех этих видах изображений.

Топография создала особый вид изображений, т. е. проекции на одну плоскость с числовыми отметками.

Окидывая взглядом итог теоретических знаний о проекционных методах, полученных в наследство поколением Монжа, мы видим, что развитие этих методов вытекало непосредственно из практических запросов техники и искусства. Разными путями, независимо один от другого, вырабатывались свои особые графические методы. Знания эти, составляющие ветви единой научной области, были отрывочны и сводились к отдельным разрозненным фактам, не объединенным в строгую научную систему.

Такую систему и создал Гаспар Монж. До него различные метрические задачи, возникавшие при строительстве крепостей, разрешались преимущественно аналитическим путем. Монж свел это к геометрическим построениям. Упорно защищая свой метод, он, повидимому, стремился доказать, что не только самый метод правилен, легок и быстр, но, самое

главное, что этот метод дает графически результат, не уступающий по точности численным выкладкам.

Создав начертательную геометрию, Монж показал, что она дает возможность не только изображать строительные конструкции, но также решать чисто графическим путем и метрические задачи.

В чем же заключались особенности его новой науки?

Исходя из математических пространственных трех прямоугольных координатных осей, Монж связал положение любой точки пространства с проекциями ее на плоскостях, образуемых попарно этими координатными осями. Учтя, что взаимное расположение проекций не изменяется от параллельного перенесения профильной плоскости, он показал, что в большинстве случаев можно получить нужный результат, не прибегая к помощи профильной плоскости проекций. В тех же случаях, когда решение пространственных задач облегчается использованием такой плоскости, он делает это неявно, не связывая ее с определенным началом координат, а рассматривая ее как частный случай проектирующей плоскости.

Анализируя решения стереометрических задач посредством геометрических построений, он убедился, что такое решение является только умозрительным, но что конкретно, посредством чертежных инструментов, оно невыполнимо. Его можно было бы выполнить пластически в пространстве трех измерений, если бы мы имели возможность совершать в этом пространстве такие „чертежные“ манипуляции, как построение линий, плоскостей и, вообще, любых поверхностей. Но, как известно, это невозможно. Мало этого, мы не можем даже фиксировать точку в пространстве.

Если же такое решение относить к вольному рисунку на плоскости, то мы будем лишены возможности решать метрические задачи, не прибегая к аналитическому способу.

Монж дал способ выйти из этого положения. Все стереометрические операции он выполняет в проекциях на две плоскости, связывая их между собою неизменным положением.

Обе плоские проекции Монж размещает в одной плоскости, т. е. на одном листе чертежа, вращая вертикальную плоскость вокруг линии пересечения ее горизонтальной плоскостью проекций, т. е. вокруг оси OX . Таким образом, он ввел впервые „ось проекций“ на плоскости чертежа, а самые проекции, вертикальную и горизонтальную, размещает так, что обе проекции любой точки изображаемой системы располагаются на одном перпендикуляре к оси проекций. В этом случае расстояния проекций до осей и будут координатами точки.

Далее, анализируя производственные операции, Монж сводит их к элементарным абстрактным, располагая их в логической последовательности и заполняя пробелы. Таким образом, он создал научную систему, показав при этом, что из двухмерного чертежа можно вывести все те отношения, которые вытекают из формы и взаимного расположения в пространстве трех измерений. Он подвел также научную базу под те эмпирические правила, которые до него давались без теоретического обоснования.

Выше мы уже отметили, что Монж разработал свою теорию поверхностей, рассматривая их с точки зрения образования их формы и кривизны. Это для инженера важнее, чем аналитическая форма. С этой точки зрения Монж излагает сведения о поверхностях и в своей начертательной геометрии. В этом труде им впервые затронуты следующие новые вопросы.

1) Поверхности с ребром возврата, применяемые при построении насыпи дорожного полотна и дамб (поверхности одинакового ската).

2) Способ вспомогательных секущих сфер, применяемый при построении линии пересечения конструкций, образуемых пересекающимися поверхностями вращения с пересекающимися осями.

3) Сферическая кривизна и другие вопросы из его „Положения анализа к геометрии“.

4) Решение задач с поверхностями второго порядка посредством вспомогательного гиперболоида.

5) Линии наибольшего ската на геодезической поверхности.

6) Использование теории проекций с числовыми отметками на одну плоскость при проектировании крепостей.

Создавая свою науку, исходя из жизненных требований строительства военных сооружений, Монж считал, что в революционной реформе высшего технического образования его новая наука должна занять видное место и стать одной из основных учебных дисциплин. Такое положение, по его мнению, поможет вывести французскую промышленность из отсталого состояния и освободить от иностранной зависимости.

Монж также считал, что прогресс промышленности требует внедрения в производство выводов точных наук, точных инструментов и знания рабочими своих машин. Начертательную геометрию, по мнению Монжа, должно применять и в учении о конструировании машин, равно как и в архитектуре.

Начертательная геометрия, говорит Монж в своем предисловии, создает язык техника, вооружает его для творческих проектов, т. е. научает его изображать трехмерные формы на плоском листе чертежа. Дальнейшей же целью начертательной геометрии является умение оперировать теорией как средством искания истины. „Она дает,—говорит Монж о начертательной геометрии,—бесконечные примеры перехода от известного к неизвестному; она пригодна не только для того, чтобы развить интеллектуальные способности великого народа...она также необходима для всех рабочих, целью которых является придавать телам определенные формы; и в особенности потому, что методы этого искусства до сих пор мало распространены или даже совсем не пользуются вниманием, вследствие чего развитие французской промышленности шло так медленно“.

Не удивительно, что в созданной им Политехнической школе математические предметы занимали первостепенное



Г. Монж.

место. При этом начертательной геометрии отводилось 328 двойных лекций. Это составляло около половины всего учебного времени.

В отношении методики изложения важно отметить, что во всех случаях Монж иллюстрирует свою мысль на простом конструктивном примере.

Однако все его рассуждения носят общий характер и могут быть приложены к любому самому сложному случаю.

Двести лет прошло со дня рождения Гаспара Монжа, полтора столетия с тех пор, как вышло в свет его гениальное творение — „Начертательная геометрия“, ознаменовавшая собою рождение новой науки, значение которой трудно переоценить. Об этом говорит то обстоятельство, что с момента возникновения эта научная область составляет основную часть науки о методах изображений, изучаемую и поныне во всех технических и художественных школах всего мира.

В России начертательная геометрия получила распространение сравнительно рано — еще в то время, когда жив был Монж. В основанном в 1809 г. Институте корпуса инженеров путей сообщения, организованном по типу Парижской школы мостов и дорог (*École des ponts et chaussées*) было введено преподавание начертательной геометрии.

Д. Каргин



ПЕРЕЧЕНЬ ТРУДОВ И ЛИТЕРАТУРЫ О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ГАСПАРА МОНЖА



I

Труды Г. Монжа, опубликованные в печати

1. Réflexions sur un tour de cartes. — Mémoires de mathématique et physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants et lus dans les assemblées, Paris, 1773, pp. 390—412.

2. Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles. — Mémoires de mathématique et physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants et lus dans les assemblées, Paris, 1773, pp. 267—300, avec 3 pl.

3. Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles. — Mémoires de mathématique et physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants et lus dans les assemblées, Paris, 1773, pp. 305—327.

Примечание. Настоящий перечень составлен путем просмотра ряда специальных журналов и каталогов Библиотеки Академии Наук СССР, Государственной Публичной библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина и Фундаментальной библиотеки Ленинградского университета. Большая часть материалов просмотрена de visu. Исключением являются издания, отсутствующие в ленинградских библиотеках. Издания, не просмотренные de visu, отмечены звездочкой.

Перечень состоит из двух разделов: 1. Труды Г. Монжа, опубликованные в печати. 2. Русская и иностранная литература о жизни и деятельности Г. Монжа. Материал внутри разделов расположен в хронологическом порядке.

*4. Sur les fonctions arbitraires continues ou discontinues, qui entrent dans les intégrales des équations aux différences finies. — Mémoires de mathématique et physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants et lus dans les assemblées, Paris, 1780, t. IX.

*5. Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables. — Mémoires de mathématique et physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants et lus dans les assemblées, Paris, 1780, t. IX.

6. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et de physique pour la même année, 1781, pp. 666—704, avec 2 pl.

7. Mémoire sur le résultat de l'inflammation du gaz inflammable et de l'air déphlogistique dans les vaisseaux clos. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et de physique pour la même année, 1783, pp. 78—88, avec 1 pl.

8. Mémoire sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires lorsqu'elles sont élevées et dans les cas où leurs intégrales complètes sont algébriques. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et de physique pour la même année, 1783, pp. 719—724.

9. Mémoire sur l'intégration des équations aux différences finies, qui ne sont pas lineaires. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et de physique pour la même année, 1783, pp. 725—730.

10. Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et physique pour la même année, 1784, pp. 502—576.

11. Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et de physique pour la même année, 1784, pp. 85—117.

12. Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris, avec les Mémoires de mathématique et de physique pour la même année, 1784, pp. 118—192.

13. Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes. — Mémoires de l'Académie des sciences de Turin, 1784—1785, part. 1, pp. 19—30.

14. Sur l'intégration de l'équation aux différences partielles. — Mémoires de l'Académie des sciences de Turin, 1784—1785, part. 1, pp. 31—33.

15. Sur les surfaces développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure. — Mémoires de mathéma-

tique et physique, présentés à l'Académie des sciences par divers savants et lus dans les assemblées, Paris, 1785, t. X, pp. 511—550, avec 2 pl.

16. Mémoire sur le fer considéré dans ses différents états métalliques. [Avec Vandermonde et Berthollet.]—Histoire de l'Académie des sciences de Paris, 1786, avec les Mémoires de mathématique et physique pour la même année, p. 132—200.

17. Mémoire sur l'effet des étincelles électriques, excitées dans l'air fixe.—Histoire de l'Académie des sciences de Paris, 1786, avec les Mémoires de mathématique et physique pour la même année, pp. 430—439.

18. Mémoire sur quelques effets d'attraction ou de répulsion apparente entre les molécules de matière.—Histoire de l'Académie des sciences de Paris, 1787, avec les Mémoires de mathématique et physique pour la même année, pp. 506—529, avec 1 pl.

19. Traité élémentaire de statique, à l'usage des collèges de la marine. Paris. 1788, 227 p., avec 5 pl.

Item. 5 ed. Revue par Hachette. Paris, 1810, 203 p., avec 5 pl.

Item. 8 ed. Suivie d'une note par Cauchy. Paris, 1846, 212 p., avec 5 pl.

То же на русск. яз. под загл.: Начальные основания статики или равновесия твердых тел для водоходных училищ. СПб., 1803, 151 стр., с 5 черт.

То же. Начальные основания статики. СПб., 1825, 208 стр., с 5 черт.

*20. Mémoire sur le phénomène d'optique, connu sous le nom de mirage.—La décade égyptienne, t. I, p. 37.

Item, sous le titre: Mémoire sur quelques phénomènes de la vision.—Annales de chimie, Paris, 1789, t. III, pp. 131—147.

21. Mémoire sur la cause des principaux phénomènes de la météorologie.—Annales de chimie, Paris, 1790, t. V, pp. 1—71.

22. Observation sur le mécanisme du feutrage.—Annales de chimie, Paris, 1790, t. VI, pp. 300—311.

23. Rapport, fait à l'Académie des sciences le 7 septembre 1790, des moyens hydrauliques, présentés par M. Detrouville, publié par les commissaires de l'Académie. [Avec Vandermonde, Condorcet, Meusnier], 24 p.

*24. Compte-rendu à la Convention nationale par le ministre de la marine, de l'état de situation de la marine de la République, le 23 septembre de l'an premier [1792]; imprimé et envoyé aux 83 départements et à l'armée, par ordre de la Convention nationale. Paris, [1792], 8 p.

*25. Réponse du citoyen ministre de la marine au citoyen Laurent Lecointre. Paris, 3 p.

26. Description de l'art de fabriquer les canons, fait en exécution de l'arrêt du Comité de Salut public du 18 pluviôse. An II. Paris, 1794, 231 p., avec 60 pl.

27. Avis aux ouvriers en fer sur la fabrication de l'acier. [Avec Berthollet et Vandermonde]. — Journal de physique, Paris, 1793, t. XLIII, pp. 373—386.

Item. Tiré à part. Publié par ordre du Comité de Salut public. Paris, 1794, 34 p., avec 5 pl.

Item. Extrait. Annales de chimie, Paris, 1797, t. XIX, pp. 13—46.

*28. Dictionnaire de physique. [Avec Cassini, Hassenfratz...]. 5 vol., 1793—1822.

29. Rapport, fait à l'Académie des sciences le 19 mars 1791, sur le choix d'une unité de mesure. [Avec Borda, Lagrange, Laplace, Condorcet]. — Annales de chimie, Paris, 1793, t. XVI, pp. 235—250.

Item. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1788, pp. 7—17.

Item. Tiré à part. 12 p.

30. Rapport, fait à l'Académie des sciences, sur le système général des poids et mesures. [Avec Borda et Lagrange]. — Histoire de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1789, p. 1.

Item. — Annales de chimie, Paris, 1793, t. XVIII, pp. 137—162.

Item. Tiré à part sous le titre: Sur l'Uniformité et le système général des poids et mesures. Rapport et projet de décret, présentés à la Convention nationale par le citoyen Abrogast et Rapport, fait à l'Académie des sciences par les citoyens Borda, Lagrange et Monge. Paris, 1793, 40 p.

Item. 2 ed. 1793, 46 p.

*31. Proclamation du Conseil executif provisoire. Extrait des registres du Conseil du 20 janvier 1793, l'an II de la République. Paris, 1793, 2 p.

Dispositions, prises au sujet de l'exécution de Louis XVI.

Signé: Roland, Clavière, Monge, Lebrun, Garat, Pache.

*32. Proclamation. Extrait du registre des délibérations du Conseil l'exécutif provisoire. Du 14 janvier 1793. Paris, 1793, 2 p.

Signé: Clavière, Lebrun, Pache, Monge, Garat.

*33. Proclamation du Conseil executif provisoire du 22 janvier 1793, l'an II de la République. Paris, 1793, 3 p.

Signé: Garat, Clavière, Lebrun, Monge.

*34. Proclamation du pouvoir executif de la République française, pour l'exécution de la loi du émigrés. Paris, 1793, 3 p.

Signé: Gohier, Clavière, Monge, Garat, Lebrun.

*35. Lettre à Magenthies (11 février 1793). Voir: Magenthies. Pétition à la convention nationale (17 mars 1793). [Paris], 12 p.

*36. Lettre à Constantini. Voir: Correspondance du citoyen Constantini avec le citoyen Monge, ministre de la Marine, concernant l'approvisionnement des arsenaux de la République française, suivie d'un projet de décret sur l'organisation du pouvoir executif. Paris, 38 p.

37. Stéréotomie. — Journal de l'École polytechnique, Paris, an III, cahier № 1, pp. 1—11.

38. Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde. — Journal de l'École polytechnique, an IV, cahier № 2, pp. 145—165.

Item. Voir: Application de l'analyse à la géométrie, § 16.

39. Géométrie descriptive. Leçons, données aux Écoles normales. Paris, an VII, 132 p., avec 25 pl.

Item. 4 ed. Paris, 1811, 120 p., avec 11 pl.

Item. 5 ed. Paris, 1827, 188 p., avec 28 pl.

Item. 6 ed., augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par M. Brisson. Bruxelles, 1834, 208 p., avec 28 pl.

Item. 7 ed. Bruxelles, 1839, 266 p., avec 9 pl.

Item. 7 ed. Paris, 1847, 184 p., avec 28 pl.

Item. En allemand sous le titre: Darstellende Geometrie. Leipzig. 1900, 217 S. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. № 117). Mit Anmerkungen des Herausgebers R. Haussner.

40. Notice sur la fabrication du fromage de Lodezan, connu sous le nom de Parmézan. — Annales de chimie, Paris, an VIII, t. XXXII, pp. 287—295.

*41. [Des remarques, faites sur les phénomènes capillaires et leur explication]. — La décade égyptienne, t. I, p. 294.

*42. Observation sur la déclinaison de l'aiguille aimantée. — La décade égyptienne, t. I, p. 295.

*43. Observations sur la fontaine de Moïse. — La décade égyptienne, t. II, p. 272.

* Item. Voir: Description de l'Égypte. État moderne. T. I, p. 409.

Item, sous le titre: Extrait des observations sur la fontaine de Moïse. — Annales de chimie, Paris, an VIII, t. XXXIV, pp. 86—89.

44. Feuilles d'analyse, appliquée à la géométrie; à l'usage de l'École polytechnique. Paris, Thermidor, an IX, №№ 1—34, avec 4 pl.

45. Mémoires sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'une même sphère. — Journal de l'École polytechnique, Paris, an X, t. IV, cahier № 11, pp. 28—58.

46. Mémoire sur la surface courbe dont toutes les normales sont tangentes à une même surface conique à base arbitraire. — Journal de l'École polytechnique, Paris, an X, t. IV, cahier № 11, pp. 59—86.

47. Application d'algèbre à la géométrie. [Avec Hachette]. — Journal de l'École polytechnique, Paris, an X, t. IV, cahier № 11, pp. 143—169.

*48. Précis des leçons sur le calorique et l'électricité. [Avec Hachette]. Paris, 1805.

49. Applications de l'analyse à la géométrie. 1805.

Item. Application de l'analyse à la géométrie. 5 ed., revue, corrigée et annotée par M. Liouville. Paris, 1850, 638 p., avec 5 pl., 1 portr.

То же. Перев. на русск. яз. под загл.: Приложение анализа к геометрии. Под ред. с предисл. и примеч. М. Я. Выгодского. М.—Л., 1936, 699 стр., с 1 портр.

50. De l'intégrale de l'équation différentielle à deux variables

$$y = xFp + fp,$$

F et f étant des fonctions quelconques de $p = \frac{dy}{dx}$. — Correspondance sur l'École polytechnique, an XIII, № 4, pp. 73—75.

51. Mémoire sur la surface courbe, dont toutes les normales sont tangentes à une même surface développable quelconque. — Journal de l'École polytechnique, Paris, 1806, t. VI, cahier № 13, pp. 1—40.

52. Second mémoire de la surface courbe qui enveloppe l'espace, parcouru par une sphère variable de rayon, et dont le centre parcourt une courbe à double courbure quelconque. — Journal de l'École polytechnique, Paris, 1806, t. VI, cahier № 13, pp. 41—59.

53. Extrait du rapport du juge de paix du canton Vezénobres sur une pierre, tombée à Valence, suivi de son analyse. [Avec Fourcroy, Berthollet et Vauquelin]. — Annales de chimie, Paris, 1806, t. LIX, pp. 34—40.

54. Solution d'une problème: trouver l'équation de la surface développable qui a, pour arête de rebroussement, une courbe à double courbure, dont on connoît l'équation unique aux différences ordinales? — Correspondance sur l'École polytechnique, 1807, № 7, pp. 209—211.

55. [Des relations, qui existent entre les coordonnées des points ou trois droites rectangulaires, passant par le centre de la sphère, coupent la surface de cette sphère]. — Correspondance sur l'École polytechnique, Paris, 1807, № 7, pp. 211—213.

56. Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillantes des surfaces courbes. [Avec Hachette]. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1807, mai, № 8, pp. 295—305.

57. Sur la pyramide triangulaire. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1809, t. II, № 1, pp. 1—6.

58. Sur quelques propriétés de la pyramide triangulaire. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1808, № 10, pp. 440—444.

59. Essai d'application de l'analyse à quelques questions de la géométrie élémentaire. — Journal de l'École polytechnique, Paris, 1809, t. VIII, cahier № 15, pp. 68—117.

60. Construction de l'équation des cordes vibrantes. — Journal de l'École polytechnique, Paris, 1809, t. VIII, cahier № 15, pp. 118—145.

61. Sur les équations différentielles des courbes du second degré. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1810, janvier, № 2, pp. 51—54.
62. Du parallélopède et de la pyramide triangulaire. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1811, № 3, pp. 261—266.
63. Rapport, fait à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut de France, sur l'ouvrage de M. Hassenfratz, intitulé: La sydereotechnie, ou l'art d'extraire la fonte, le fer et l'acier des minerais, qui les contiennent. [Avec Lellèvre et Vauquelin]. — Annales de chimie, Paris, 1812 t. LXXXIV, pp. 45—71.
- *64. Des surfaces du second degré de révolution et propriétés générales de ces surfaces. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1812, № 4, pp. 313—323.
- *65. Sur les diamètres principaux des surfaces du second degré, de la grandeur de ces diamètres. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1813, № 5, pp. 415—417.
- *66. Note de M. Monge sur la solution de M. Georgini et sur les quadrilatères gauches. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1813, № 5, p. 445.
67. Rapport, fait par une commission composée de M. M. Carnot, Monge et Poisson, sur les trois premiers mémoires de géométrie et d'analyse, présentés par Ch. Dupin dans la séance du 14 décembre 1812. Voir: Dupin, Ch. Développements de géométrie. Paris, 1813, pp. XIII—XX.
68. Démonstration d'un théorème de géométrie analytique. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1814, № 2, pp. 152—153.
69. Solution graphique des équations du troisième degré. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1814, № 2, pp. 201—203.
70. Du centre de similitude de deux courbes semblables. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1814, t. III, № 1, pp. 4—5.
- *71. Théorème de géométrie. — Correspondance sur l'École polytechnique, 1816, № 3, pp. 299—302.
72. Théorie des ombres et de la perspective. Publiée avec la géométrie descriptive. 1834.

II

**Русская и иностранная литература о жизни
и деятельности Г. Монжа**

73. De Luc. Examen d'un mémoire de M. Monge, sur la cause des principaux phénomènes de la météorologie, adressé à M. M. les auteurs des Annales de chimie. — Annales de chimie, Paris, 1791, janvier, t. VII, pp. 73—102.

74. Lettre du cit. Hachette au cit. Guyton. Sur les leçons de géométrie descriptive du cit. Monge. — Annales de chimie, Paris, an VII, t. XXX, p. 217.

75. Monge, G. Voir: Dictionnaire biographique et historique des hommes marquants de la fin du XVIII siècle. T. III. Londres, 1800, pp. 51—52.

*76. Brisson B. Notice historique sur Gaspard Monge. Paris, 1818, 27 p.

* 7. [Guyon]. Éloge funèbre de M. Monge, Comte de Peluze, ancien sénateur, grand officier de la Légion d'Honneur, exmembre de l'Institut, par un élève de l'École polytechnique, précédé d'une notice sur la vie et les ouvrages de cet homme célèbre. Paris, 1818, 16 p.

78. Dupin [Ch.]. Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge. 1819, 171 p., avec 1 portr. Bibliogr.: pp. 162—166.

79. Arnault A. V., A. Jay, E. Jouy, J. Norvins et autres hommes de lettres, magistrats et militaires. Biographie nouvelle des contemporains ou dictionnaire historique et raisonnée de tous les hommes qui, depuis la Revolution française, ont acquis de la célébrité par leurs actions, leurs écrits, leurs erreurs ou leurs crimes, soit en France, soit dans les pays étrangers. Ornée de 3000 portraits au Burin, d'après les plus célèbres artistes, t. XIII. Paris, 1824.

G. Monge, pp. 423—432.

80. Biographie de tous les ministres depuis la Constitution de 1791 jusqu'à nos jours. Paris, 1825, 586 p.

G. Monge, pp. 409—417.

81. Charles M. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. Bruxelles, 1877, 851 p.

Item. 2 éd. Paris, 1875, 851 p.

Item. Paris, 1889, 851 p.

G. Monge, pp. 32, 56, 66, 87, 117, 124, 125, 137, 139, 189—210, 212, 219, 241, 244, 268, 288, 355—357, 370, 376—383.

То же. На русск. яз. под загл.: Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883, 307, 428, IV стр.

Г. Монж, т. I, стр. 217—240; т. II, стр. 366—375.

*82. Pautet, J. F. J. Notice sur Gaspard Monge. Beaune. 1838, 27 et 4 p.

Après la page 27: Une statue à G. Monge sur la place Saint-Pierre de Beaune.

83. Charles M. Geschichte der Geometrie. Halle. 1839, 662 S.

G. Monge, SS. 397, 405—413.

84. Comte A. Traité élémentaire de géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Paris, 1843, 598 p.

G. Monge, pp. 492, 494, 495—502, 597, 598.

*85. Pautet J. F. J. Éloge de Gaspard Monge. 4 éd. avec lithographie. Beaune, 1849, 26 p.

Lithographie anonyme d'après la statue de Rude.

*86. Ravailhe F. Éloge de Gaspard Monge. Beaune, 1849, 27 p.

*87. Dupin Ch. Éloge de Gaspard Monge, prononcé le 2 septembre 1849, au nom de l'Académie des sciences. Paris, 18 p.

A l'inauguration de la statue de Rude.

*88. Olivier Th. Monge et l'École polytechnique (Extrait de la „Revue scientifique et industrielle“, 1850, février). Paris.

*89. Jomard E. F. Souvenirs sur Gaspard Monge et ses rapports avec Napoléon, suivis d'un appendice relatif au monument qui lui a été élevé par sa ville natale, ainsi qu'à l'expédition d'Égypte et à l'École polytechnique. Paris, 1853, 174 p.

90. Монж, Г. В кн.: Справочный энциклопедический словарь, т. VIII. СПб., 1854, стр. 224—225.

91. Arago F. Biographie de Gaspard Monge, lue à la séance publique du 11 mai 1846. — Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France, Paris, 1854, t. XXIV, pp. I—CLVII.

Item. Tiré à part. Paris, 1853, 157 p.

Item. Voir: Oeuvres complètes, t. II. Paris—Leipzig, 1854, pp. 426—592.

То же. На русск. яз Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, т. I. СПб., 1859, стр. 499—589.

92. Correspondance de Napoléon I^{er}, publiée par ordre de Napoléon III, t. III. Paris, 1859.

Lettre au Directoire exécutif concernant G. Monge, p. 517.

*93. De Pongerville. Gaspard Monge et l'expédition d'Égypte. — Revue orientale et américaine, 1860.

Item. Voir: Nouvelle biographie générale. Publiée par F. Didot, t. XXXV. Paris, 1861, pp. 974—987.

94. Pogendorff J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Leipzig, 1863.

G. Monge, Bd. II, SS. 184—185.

95. Salmon G. A treatise on the analytic geometry of three dimensions. Dublin, 1865, 520 p.

G. Monge, pp. 237, 253, 293, 301, 305, 366—370.

96. Charles M. Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris, 1870, 388 p.

G. Monge, pp. 2, 3, 7, 10, 19, 22, 29, 37, 66, 70, 90, 154, 161, 179, 208, 210, 335, 375.

97. Gauss C. F. Werke, Bd. IV. Göttingen, 1873, 492 S.

G. Monge, SS. 359—360.

98. Hoefler F. Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle. Paris, 1874, 602 p.

G. Monge, pp. 583—590.

99. Ша л ь. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. М., 1883, 307, 427, IV стр.

Г. Монж, стр. 217—240, 366—375.

100. Heller A. Geschichte der Physik. Stuttgart. 1884, 753 S.

G. Monge, Bd. II, SS. 450, 513, 542, 598—599, 600.

101. Marie M. Histoire des sciences mathématiques et physiques, т. X. Paris, 1887.

G. Monge, pp. 2—12.

102. Pinet G. Histoire de l'École polytechnique. Paris, 1887, 500 p., avec ill.

G. Monge, pp. 13, 14, 16, 20, 26, 36, 37, 46, 49, 63, 69, 94, 98, 116, 117, 204, 323, 353, 354, 356, 359, 363, 364, 366, 373, 375, 380, 381, 382, 383, 386, 389, 394, 395, 401, 412, 413, 427, 454, 455, 467.

103. Joachimsthal F. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Leipzig, 1890, 308 S.

G. Monge, S. 188.

104. Jacobi C. G. I. Gesammelte Werke. Bd. VII. Berlin, 1891, 440 S.

G. Monge, SS. 357—363, 368.

*105. Fink, K. Monge. — Correspondenzblatt für die gelehrten- und Realschulen Württembergs, 1892, H. 7—10.

106. [Harrison F., ed.]. The new calendar of great men. Biographies of the 558 worthies of all ages and nations in the positivist calendar of Auguste Comte. London, 1892, 644 p.

G. Monge, pp. 610—611.

107. Курдюмов В. И. Курс начертательной геометрии. Отд. 1, ч. 1. СПб., 1895, 430 стр., с рис. и 1 портр. на отд. л.

Г. Монж, стр. I—VI, X—XII, XVI, XVIII—XXIII.

108. Boudois P. Napoléon et la Société de son temps (1793—1821). Paris, 1895, 445 p.

G. Monge, pp. 16, 72, 88, 91, 99, 101, 110.

109. Obenrauch F. J. Geschichte der darstellenden und projectiven Geometrie. Brünn, 1897, 442 S.

Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft, SS. 1—164.

110. Haussner R. Anmerkungen: Entwicklung der Parallelprojection vor Monge; biographische Mittheilungen ueber Monge; Monge's Geometrie descriptive. In.: Monge, G. Darstellende Geometrie. Leipzig, 1900. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. № 117), SS. 177—212.

111. Монж Г. В кн.: Энциклопедический словарь в трех томах, т. II. СПб., 1901, табл. 2182.

112. Монж Г. В кн.: Большая Энциклопедия, т. XIII. СПб., 1903, стр. 355.

113. Monge G. In.: Meijers Grosses Konversations Lexikon, Bd. XIV. Leipzig u. Wien, 1905, S. 68.

114. Monge G. In.: Chambers's encyclopaedia, v. VII. London, 1908, p. 271.

115. Дарбу Г. Этюд о развитии геометрических методов. Казань, 1911, 37 стр.

Г. Монж, стр. 6—7.

116. Wieleitner H. Geschichte der Mathematik, II Teil, 1 Hälfte. Leipzig, 1911. (Sammlung Schubert LXIII).

G. Monge, SS. 22, 58, 96, 191, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 216, 217, 218, 228, 234.

117. Рынин Н. А. Начертательная геометрия. Ортогональные проекции. (Метод Монжа). Пгр., 1916, 314 стр., с рис.

118. Федоров Е. С. Новая начертательная геометрия. — Известия Академии Наук, Пгр., 6 сер., 1917, № 10, стр. 657—686, с рис.

Г. Монж, стр. 657—659, 661.

119. Smith D. E. Monge and the American colonies. — The American mathematical monthly, Lancaster, 1921, v. XXVIII, p. 166.

120. Курнаков Н. С. Непрерывность химических превращений веществ. (Речь, прочитанная на годичном собрании Российской Академии 29 декабря 1922 г.). Л., 1923, 23 стр.

Г. Монж, стр. 2—3, 23.

121. Picard E. Discours et mélanges. Paris, 1922, 291 p.

G. Monge, pp. 133—134.

122. Nielsen N. Franske matematikere under revolutionen. København. 1927, 202 S., mit portr.

G. Monge, SS. 94—100.

123. Poisson Ch. Les fournisseurs aux armées sous la Révolution française. Paris, 1932, 366 p.

G. Monge, pp. 26, 28, 113, 137, 185, 192, 194, 195, 266, 297.

124. Struik D. I. Outline of history of differential Geometry. — Isis, 1933, № 55, pp. 92—127; № 58, pp. 161—191.

G. Monge, pp. 117—120, 173—177.

*125. Launay Louis de. Monge, fondateur de l'École polytechnique. Paris, 1933, 380 p., avec ill. et front. (portr.), 1 pl. Bibliogr.: pp. 263—274.

Рецензия: М. Выгодский. — Архив истории науки и техники. 1935, вып. 5, стр. 584—587.

126. Archibald R. C. Outline of the history of mathematics. Oberlin, Ohio, 1934, 58 p. Bibliogr.: pp. 49—58.

G. Monge, p. 42.

127. Выгодский М. Я. Возникновение дифференциальной геометрии. — Архив истории науки и техники, 1935, вып. 6, стр. 63—96.

Предисловие к русскому изданию „Application de l'analyse à la géométrie“ Монжа 1936 г., стр. 7—70.

128. Monge G. In.: The Encyclopedia Americana, v. XIX, New York, Chicago, 1936, pp. 353—354.

129. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в 19 столетии, ч. 1. М.—Л., 1937, 432 стр.

Г. Монж, стр. 31, 33, 34, 98, 105, 108, 110—112.

130. Ducassé P. A la mémoire de Gaspard Monge. Voir: Auguste Comte et Gaspard Monge. Paris, 1937, pp. 9—15.

Discours, prononcé le 5 septembre 1936, a l'occasion du 79 anniversaire de la mort d'Auguste Comte.

131. Encyclopédie française, t. I. Paris, 1937.

G. Monge, pp. 58₃, 80₁₃—80₁₆. Уравнения Монж-Ампера.

132. Grand mémento encyclopédique Larousse, t. II, Paris, 1937, 1095 p.

G. Monge, p. 151.

133. Рынин Н. А. Материалы к истории начертательной геометрии. Л., 1938, 113 стр., с рис. Библиогр.: стр. 99—110.

Г. Монж, стр. 8—12, 26, 75.

134. Монж Г. В кн.: Большая Советская Энциклопедия, т. XL. М.—Л., 1938, столб. 107—108.

135. Amodeo F. Origen y desarrollo de la Geometria proyectiva. Traducción del italiano. Argentina. Rosario, 1939, 217 p.

G. Monge, pp. 11, 15, 26, 28—30, 32, 33, 34, 40, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 57, 67, 99, 104, 162, 163.

136. Kowalewski G. Grosse Mathematiker. München, 1939, 300 S., mit Fig. u. Kunstdrucktafeln. Literat.: S. 223.

G. Monge, SS. 220—228.

137. Французская буржуазная революция. 1789—1794. Под редакцией В. П. Волгина и Е. В. Тарле. М.—Л., 1941, 849 стр.

Г. Монж, стр. 216, 561, 562, 566, 574, 575, 580, 582, 583, 584.

138. Крылов А. Н. Мои воспоминания. М.—Л., 1945, 552 стр., с 1 портр. на отд. л.

Г. Монж, стр. 524—526.

139. Старосельская-Никитина О. Очерки по истории науки и техники периода французской буржуазной революции. 1789—1794. М.—Л., 1946, 274 стр.

Г. Монж, стр. 6, 15, 18, 20, 57, 71, 73, 79, 96, 97, 144, 148, 164, 166, 168, 171, 177—179, 205, 207, 218, 220, 223, 225, 261.

140. Каргин Д. И. Гаспар Монж. (1746—1818). Биографический очерк. М., 1946, 9 стр.

141. Каргин Д. И. Гаспар Монж — творец начертательной геометрии. 1746—1818. К 200-летию со дня рождения. — Природа, 1947, № 2, стр. 65—73.

142. Монж Г. В кн.: Энциклопедический словарь Граната, т. XXIX. М., слоб. 271—273.

143. Монж Г. В кн.: Новый Энциклопедический словарь, т. XXVII. П., слоб. 77—78.

144. Monge G. Voir.: Larousse, P. Grand dictionnaire universel, t. XI, Paris, pp. 439—440.

145. Tannery P. Monge G. Voir.: La Grande Encyclopedie, t. XXIV, Paris, p. 63.

Составлено сотрудником
Научно-библиографического отдела
Библиотеки Академии Наук СССР
А. М. Лукомской

ПРИМЕЧАНИЯ



„Начертательная геометрия“

¹ Перевод книги Гаспара Монжа „Géométrie descriptive“ сделан с нового издания, вышедшего в Париже в 1811 г. при жизни ее автора. Отличие нового издания от первого издания 1798 г. самое несущественное. При редактировании книги в тексте ее восстановлены заголовки глав, имевшиеся в первом издании. Обозначения, данные Монжем в тексте и на эпюрах, сохранены в неприкосновенности. Чертежи воспроизведены в факсимиле.

Лекции Монжа в Нормальной высшей школе стенографировались. Сам Монж отредактировал их и впервые напечатал в 1795 г. в „Journal des écoles normales“, тт. I—IV, под заглавием: „Leçons de géométrie descriptive, données à l'école normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes“. Первое издание этих лекций появилось на VII году республики (22 IX 1798 — 22 IX 1799) под заглавием: „Géométrie descriptive“ (Leçons, données aux écoles normales. L'an VII de la république). Дальнейшие издания этого труда выходили в 1800, 1811, 1820, 1827, 1837 и 1847 (7-е изд.) гг. Текст перепечатывался без изменения, за исключением отдельных слов, как-то: „empire“ вместо „république“, и т. п. Некоторые издания были снабжены дополнениями, сделанными Гашеттом (3-е изд. 1811 г.) и Brisson'ом (4-е и 5-е изд. 1820 и 1847 гг.).

Для настоящего перевода было выбрано 3-е издание, напечатанное после того, как первые два были признаны практикой пользования ими.

² Свое предисловие, написанное к курсу „Начертательной геометрии“ Гаспар Монж озаглавил: „Programme“.

В этом предисловии автор излагает программные вопросы реформы образования в тогдашней Франции.

³ Монж подразумевает не только область искусства, но также и ремесла (des arts); не только художников, но также и специалистов ремесла и инженеров (artistes).

⁴ Курс начертательной геометрии Гаспара Монжа включает в себе, собственно, только теорию ортогональных проекций, т. е. ту часть, которая в настоящее время носит наименование в наших учебниках „Метода Монжа“. Настоящий перевод книги Монжа сделан, по возможности, близким к тексту подлинника, без поправок на современную терминологию и т. п.

⁵ Монж дает определение понятия „проекция“, исходя из формального математического свойства, не связывая в настоящем изложении с естественным происхождением проекции из совокупности элементов: предмет, глаз, картина. Только в дополнении к своей книге („Теория перспектив“) он так трактует понятие о проекции.

⁶ У Монжа прямая линии неопределенной длины называется „La droite indéfinie“. В переводе мы сохраняем во всех случаях это неправильное наименование: „неопределенная прямая“. „L'horizontale indéfinie“ в переводе сохраняем наименование „неопределенная горизонталь“. Монж называет вертикальную проекцию горизонтали — горизонталью.

⁷ У Монжа „des artistes“ — не только „художники“, но вообще „специалисты“ ремесл, инженеры и т. п.

⁸ „Линия пересечения двух плоскостей проекций“, — т. е. „ось проекций“, координатная ось OX , как мы теперь называем эту линию пересечения. У Гаспара Монжа на протяжении всего курса его начертательной геометрии термин „ось проекций“ не встречается. Он всегда называет ее линией пересечения плоскостей проекций.

⁹ На фиг. 3 Монж дает простое построение для определения длины отрезка прямой линии AB . В наших учебниках излагается более сложное построение, т. е. построение, дающее менее точные результаты. Меньшая точность получается вследствие того, что построение искомого прямоугольного треугольника у Монжа требует проведения меньшего числа линий.

¹⁰ Обозначения геометрических элементов на эпюрах в книге Монжа отчасти похожи на общепринятые обозначения в русских сочинениях по начертательной геометрии. Однако они отличны и сводятся к следующему.

а) Ось проекций на всех чертежах обозначена буквами LM . Хотя он и указывал на происхождение ее, как одной из трех линий пересечения координатных плоскостей, тем не менее двумя другими осями он не пользуется, считая, что во всех случаях практики можно обойтись только двумя координатными плоскостями, пересекающимися по одной линии.

б) Горизонтальная проекция точки обозначается им прописной латинской буквой, а вертикальная проекция той же строчной буквой. Иногда он все же отступает от этого правила.

в) Проекции линий (прямых, кривых) обозначаются им соответственно двумя или более буквами: заглавными для горизонтальной проекции и строчными для вертикальной.

г) Следы плоскости обозначаются иногда каждый двумя заглавными буквами, различными для каждого из них.

11. Монж не делает различия между словами „алгебра“ и „анализ“ и применяет их произвольно, по желанию.

12. Ошибочно в тексте подлинника напечатано *ab* вместо *AB*. Опечатка сохранена и в переводе.

13. Обращаем внимание на весьма изящное решение задачи на построение истинных размеров угла между заданными плоскостями. Это решение дает весьма точный графический результат.

14. „Le cercle indéfini“ — в переводе: „Неопределенный круг“, т. е. круг произвольного радиуса, подобно термину „неопределенная прямая“, см. примечание 6.

15. „Les voussoirs“ — камни, из которых складывается свод, имеют клинообразную форму; поэтому в переводе они названы „клиноватыми камнями“. Термином „Le joint“ в строительном деле обозначается „шов“ между соприкасающимися гранями камней, т. е. весьма тонкий промежуток, чаще всего заполняемый раствором (известью, цементом). У Монжа этот термин понимается в смысле самой поверхности соприкасающихся смежных камней.

16. У Монжа сказано: „философия“; это слово сохранено и в переводе. Вернее сказать: „психология“.

17. Задача на построение касательной плоскости представляет собой прекрасный образец методики изложения Монжем своего курса начертательной геометрии, которой он придерживается и в других задачах, а именно: на элементарном частном примере, не загромождающем чертежа сложными построениями, он излагает его решение, облекая в общую форму так, что все рассуждения могут быть приложены к любому другому примеру. Роберт Гаусснер в примечаниях к своему немецкому переводу книги Монжа, как бы ставит в упрек автору то, что он во всех случаях выбирает наиболее простое задание, не осложненное никакими предвходящими случайностями, как-то: непересечение следов плоскости в пределах поля чертежа и др., и даже отсылает читателя к приложениям, написанным Гашеттом к 3-му изданию книги Монжа, в которых Гашетт приводит более простые решения различных задач Монжа.

18. Характерен другой пример методики изложения для возбуждения самостоятельности учеников. Если читатель не сможет самостоятельно составить чертеж, ему на помощь приходит слепой чертеж; если на нем расставить буквы, то он оживает.

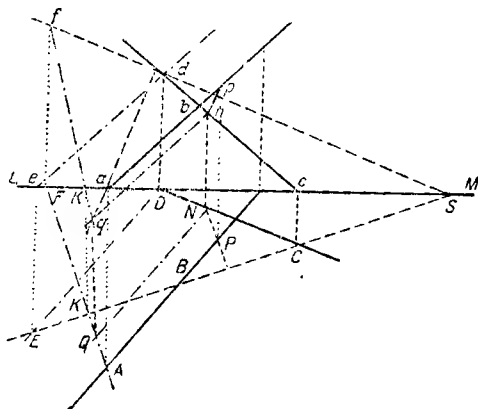
19. *AG* — горизонтальный след вспомогательной вертикальной плоскости: „L'horizontale indéfinie“.

20. В изложенной задаче (фиг. 14) Монж неявно применяет способ двукратного вращения: прямого и обратного, не излагая этого способа, как

чего-то особенного. Это же сделано им и на фиг. 9. На фиг. 10 решение основано на способе вращения вокруг горизонтали.

²¹ Еще проще эта задача решается способом перемены плоскостей проекций.

В первом издании (1798) своего труда Монж дает иное конструктивное решение задачи на определение отрезка линии кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми. Оно основано на тех же самых



Фиг. 1.

рассуждениях об использовании вспомогательной плоскости параллелизма и цилиндра вращения; однако к построению самого цилиндра он не прибегает. Приведем это решение (фиг. 1).

1. Для того чтобы построить следы CE и fd плоскости параллелизма скрещивающихся линий AB и CD , построим сначала горизонтальный след C , с линии CD , через который должен проходить горизонтальный след плоскости. Затем через вертикальный след D, d этой же прямой проводим линию de , параллельную ab , а также линию DE , параллельную AB . Потом находим горизонтальный след E, e этой вспомогательной прямой DE, de . Точки C и E определяют собою положение горизонтального следа CE искомой плоскости параллелизма, пересекающей ось проекции в точке S . Если соединить прямой линией точки S и d , то получим вертикальный след той же плоскости.

2. Для построения линии NQ , по которой поверхность цилиндра соприкасается с плоскостью параллелизма, нужно из любой точки оси цилиндра AB опустить перпендикуляр на плоскость параллелизма, например из следа A, a ; основание Qq этого перпендикуляра будет принадлежать линии соприкосновения QN, qn . Точка Q, q строится обычным способом, как

пересечение прямой с плоскостью. Если провести теперь линию QN , qn параллельно оси цилиндра AB , ab , то она и будет искомой линией соприкосновения. Точка N , n , в которой пересекаются линии соприкосновения с другой данной прямой DC , dc и будет той точкой, через которую проходит искомая линия кратчайшего расстояния.

3. После того как будут построены проекции N , n точки искомой линии кратчайшего расстояния, из N опускаем перпендикуляр на след SE , а из n на след Sd ; отрезок этого перпендикуляра NP , np , заключенный между данными скрещивающимися линиями, и будет искомым кратчайшим расстоянием.

4. В результате искомые размеры этого кратчайшего расстояния определяются известным способом.

Изложенный здесь способ менее точен, чем тот, который приведен Мошжем и издании 1811 г.

²² Валганг — поверхность вала укреплений.

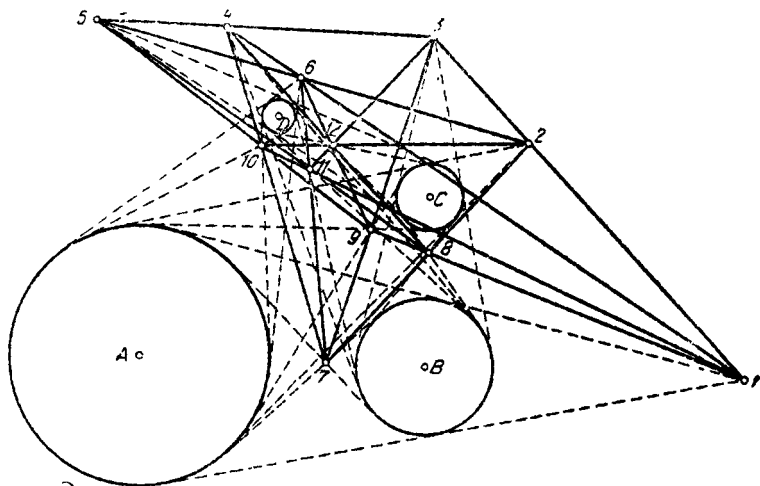
²³ о ж в своих „*Feuilles d'analyse*“* доказывает теорему о том, что кривая соприкосновения соприкасающегося конуса с поверхностью n -го порядка принадлежит поверхности $(n-1)$ -го порядка. Из этого положения следует, что если конус соприкасается с поверхностью второго порядка, то это соприкосновение происходит по плоской кривой, которая может быть только коническим сечением. Эта теорема положена в основание доказательства положений, изложенных в параграфе 39 и в параграфе 40.

²⁴ Надо учитывать, что при внутреннем касании плоскости два шара из трех данных будут непременно находиться по одну сторону плоскости, а третий — по другую сторону при любых комбинациях. Поэтому, при четырех заданных шарах, любая комбинация трех из них позволяет получить на одной прямой три их внешних центра подобия, т. е. четыре прямые линии, расположенные в одной плоскости. Если же учитывать и внутренние центры подобия, то при трех шарах два из них лежат на одной прямой, проходящей через внешний центр подобия третьей пары комбинации шаров. Учитывая это обстоятельство, нетрудно составить комбинации прямых по четыре пересекающихся в одной плоскости так, чтобы из шести точек по три находилось на одной прямой. На фиг. 2 изображена проекция четырех шаров: A , B , C , D на некоторую плоскость. Точки 1, 2, ..., 6 представляют собою внешние центры подобия этих шаров; точки 7, 8, ..., 12 — внутренние центры подобия. Из этой проекции видно, что четыре линии: 1-3, 3-5, 5-2, 1-4 находятся на одной плоскости; они соединяют шесть точек (внешние центры подобия) по три. Из линий, соединяющих

* „*Feuilles d'analyse, appliquées à la géométrie, à l'usage de l'école polytechnique, publiée la première année de cette école (an III de la République)*“, Paris, an IX, 1800/1801, № 5.

только внутренние центры подобия, нельзя составить подобного рода фигур, которые были бы плоскими, но из комбинаций тех и других получаются аналогичные плоские фигуры, например фигура: 6-7-2-5-11-8.

²⁵ Нетрудно убедиться, что кривая *grnf* представляет собою гиперболу с вершиной в точке *г* и с мнимой осью *aa'*. Вспомогательной поверхностью является, следовательно, гиперboloид вращения, осью которого служит ось вращения *A, aa'*, кругом горловины — *DR* и образующей —



Фиг. 2.

данная прямая *BC, bc*. Способ, предложенный Монжем, является общим не только для поверхностей второго порядка.

²⁶ Выражение „кривая двойкой кривизны“ впервые в печати находим у Пито (1695—1771).^{*} Он говорит об обыкновенной винтовой линии, отличая ее от спирали или улитки, как ее называли древние математики. Она должна лежать на поверхности кривого тела, чтобы быть кривой двойкой кривизны. Статья его озаглавлена: „Sur la quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appelée la compagne de la cycloïde“. Один из предложенных им способов вывода квадратуры рассматривает синусоиду как проекцию спирали, нанесенной на поверхности цилиндра, на плоскость, параллельную его оси. Для обозначения линии на самой поверхности он и ввел термин „кривая двойкой кривизны“, сохранившийся до настоящего времени.

^{*} Henri Pito. Histoire de l'Académie des sciences. Anné 1724, p. 113.

²⁷ Глубокое замечание Монжа о том, что любая операция в анализе может быть отображена методами начертательной геометрии, и о том, что для наиболее эффективного изучения математики ученик должен как можно раньше привыкнуть чувствовать соответствие между операциями анализа и геометрии, можно продолжить примером графического решения системы уравнений первой степени с тремя неизвестными. Действительно, пусть нам задана следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z &= D_1 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z &= D_2 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z &= D_3 \end{aligned} \right\}$$

Сделав преобразование, получим ее в таком виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\left(\frac{D_1}{A_1}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{D_1}{B_1}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{D_1}{C_1}\right)} &= 1 \\ \frac{x}{\left(\frac{D_2}{A_2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{D_2}{B_2}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{D_2}{C_2}\right)} &= 1 \\ \frac{x}{\left(\frac{D_3}{A_3}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{D_3}{B_3}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{D_3}{C_3}\right)} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Каждое из этих уравнений в отдельности представляет собою плоскость в отрезках координатных осей. Решение системы сводится, следовательно, к отысканию точки пересечения данных трех плоскостей, координаты которой будут одновременно удовлетворять всем трем уравнениям. Имея значения отрезков координатных осей, легко построить следы каждой из плоскостей. На фиг. 3 это выполнено в аксонометрических проекциях, а на фиг. 4 в ортогональных проекциях. На чертеже плоскость P соответствует первому уравнению, если

$$ox = \frac{D_1}{A_1}; \quad oy = \frac{D_1}{B_1}; \quad oz = \frac{D_1}{C_1}$$

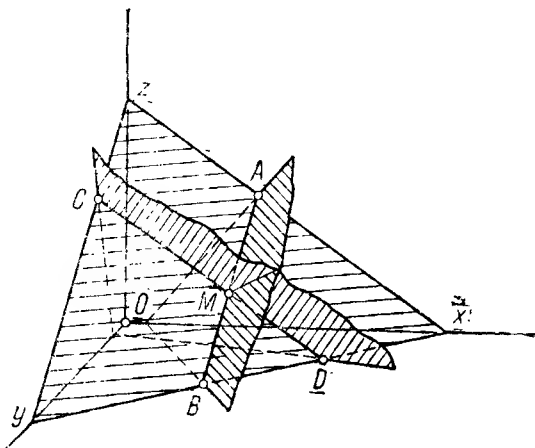
и т. д.

AB — линия пересечения плоскостей P и Q , определяемая совокупностью первых двух уравнений; линия CD — пересечение P и R , определяемое совокупностью первого и третьего уравнений, M — точка пересечения трех плоскостей P , Q , R , координаты которой представляют решение системы.

²⁸ „de plans indéfinis“ — неопределенные плоскости в смысле плоскостей неограниченных размеров.

²⁹ Способ вспомогательных секущих шаровых поверхностей для построения точек линии пересечения поверхностей вращения, оси которых пересекаются, предложен впервые Монжем и не встречается в более ранних печатных сочинениях.

³⁰ Монж делает построение касательной, не учитывая, что на чертеже сечение получилось в виде эллипса, а это облегчило бы рассмотрение



Фиг. 3.

вопроса. Это сделано им для того, чтобы дать общее решение при цилиндре с любой направляющей. Гаусснер* упрекает автора опять за простейшую комбинацию фигур. Предположим, что точка n (фиг. 27) получается вне пределов чертежа. Тогда вместо нее можно рассмотреть на касательной другую точку, а именно: точку пересечения горизонтальной проекции касательной HF с „шарниром“ вращения $CE, c'e'$.

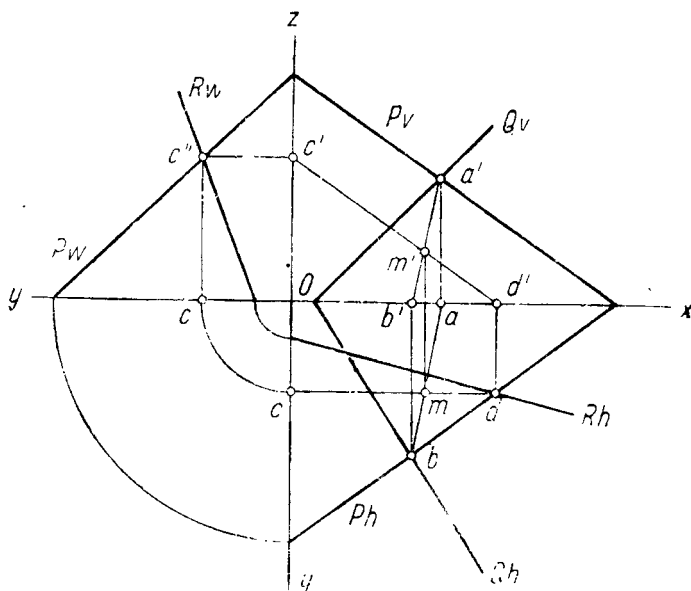
³¹ Монж не дает способа выпрямления дуги окружности. Он не поясняет того, что развертка линии сечения на чертеже является синусоидой, считая, что в общем случае задания цилиндрической поверхности эта линия может оказаться случайной формы. Монж не применяет наименования „коитур видимости предмета“.

³² На фиг. 28 Монж попутно дает способ построения линии пересечения плоскостей в затруднительном случае, когда в пределах чертежа

* Specielle Textanmerkungen. Leipzig, 1900, SS. 201—202.

нет ни точки схода следов вспомогательной плоскости, ни точки пересечения вертикальных следов.

33 Способ построения касательной GF (фиг. 28) к кривой CED в точке F Монж не приводит, повидимому, из тех соображений, что правило построения касательной диктуется частным случаем задания самой



Фиг. 4.

кривой; иначе с таким же успехом можно было бы непосредственно построить касательную IG в точке I к проекции кривой.

34 Определение истинного вида фигуры сечения на фиг. 29 Монж выполняет, по существу, посредством перемены горизонтальной плоскости проекций. Однако он не оформляет этого метода как особого простого метода при решении задач.

35 Каким способом при развертке поверхности конуса возможно на дуге круга одного радиуса откладывать длину дуги круга другого радиуса, Монж не указывает.

36 Красивый способ решения задачи на пересечение сферы и конуса можно с успехом распространить и на случаи других поверхностей, как-то:

сфера и цилиндр, конус и поверхность вращения, ось которой проходит через вершину конуса.

³⁷ Интересен данный Монжем способ изгибания кривой двойкой кривизны с целью обращения ее в плоскую кривую с сохранением ее длины. Однако и в этом случае Монж не дает способа выпрямления дуги плоской кривой.

Способ развертки поверхности конуса посредством пересечения ее концентрической сферой, вместо распространенного ныне, введенного еще Фрезье, приближенного способа замены конуса вписанной в него пирамидой с достаточно большим числом боковых граней, не потерял интереса и в настоящее время. В случае эллиптического конуса это дает весьма простой и изящный способ развертки.

³⁸ Построение касательных линий к кривым линиям двойкой кривизны, как линии пересечения двух плоскостей, касательных к кривым поверхностям, является способом, которым Монж широко пользуется как общим методом, представляющим интерес и ныне.

³⁹ У Монжа термин „перспектива“ противопоставляется термину „проекция“. В настоящее время перспективу мы также считаем проекцией конической. Однако Монж проекцией называет то, что мы считаем ортогональной проекцией, т. е. частным случаем перспективы, когда центр проектирования удален в бесконечность по направлению, перпендикулярному плоскости картины.

⁴⁰ Монж допустил здесь ошибку. Он говорит, что образующая точка опишет в пространстве кривую двойкой кривизны. На самом же деле это будет плоская кривая — эллипс. Доказать это нетрудно следующим способом.

Отнесем изображенную на фиг. 37 систему к прямоугольным координатным осям AX , AU , AZ (фиг. 5). Буквами A , B , C обозначим точки, к которым одновременно стремится точка M . Составим уравнение искомой кривой траектории точки M . Обозначенные на чертеже координаты всех этих точек следующие

$$A(0, 0, 0); \quad B(b, c, 0); \quad C(a, 0, 0); \quad M(x, y, z).$$

Из этого видно, что начало координат совпадает с точкой A ; точка C находится на оси AX , а точка B — в координатной плоскости XAU .

Составим уравнение искомой кривой линии, пользуясь условиями движения точки M , т. е.

$$\begin{cases} AM + MC = k \\ AM + MB = m \end{cases}$$

Это уравнение представляет собою проекцию искомой траектории на координатную плоскость $ХАУ$, т. е. прямую линию, проводимую точкой $т$. Следовательно, искомая линия в пространстве представляет собою плоскую кривую. Для того чтобы определить теперь форму этой линии, рассмотрим фиг. 6, на которой в плоскости чертежа показаны данные точки A, B, C и проекция $т$ точки M . Первое условие о том, что сумма расстояний ее от точек A и B постоянна, показывает, что эта точка принадлежит геометрическому месту, представляющему собою поверхность эллипсоида вращения с фокусами в данных точках A и B . Второе условие говорит о том, что точка M принадлежит также и поверхности второго эллипсоида вращения с фокусами A и C . Сечение этих эллипсоидов плоскостью чертежа через фокусы и изображено на фиг. 6. Проекция самой линии есть прямая NP , полученная в результате пересечения эллипсоидов плоскостью; сечение это, как известно из аналитической геометрии, представляет собою эллипс. Эта проекция может быть получена также посредством вспомогательных секущих шаровых поверхностей с общим центром в общем фокусе эллипсоидов A . Одна из таких сфер $QSRT$ изображена на чертеже и показывает, что точка $M(m)$ принадлежит пересечению трех поверхностей.

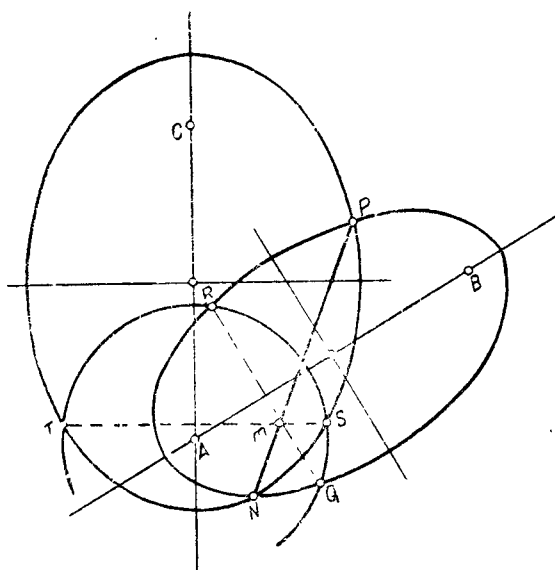
⁴¹ Важнейшее из открытий Роберваля (1602—1675) — метод построения касательных к кривым и различные его приложения. Напечатано в „*Observation sur la compositions des mouvements et sur le moyen le trouver les touchants des lignes courbes*“. В настоящее время доказано, что Роберваль и Торричели, независимо один от другого, нашли один и тот же метод, называвшийся ранее „методом Роберваля“. Результаты, выведенные Робервалем, правильны. Однако в XIX в. Дюамель обнаружил неточными общие соображения.*

⁴² Монж при решении различных задач часто пользуется возможностью свободного выбора плоскостей проекций, при котором расположение заданных геометрических элементов оказывается наиболее удобным для более простого способа решения. Если относительное их положение известно, то к такому исходному простейшему заданию легко притти независимо от заданного случайного положения, не уменьшая точности построений. Полученный результат нетрудно затем использовать для нанесения на случайное положение искомого.

⁴³ Гаспар Монж ознакомился с применением числовых отметок, горизонталей и линий наибольшего падения в Мезьере при решении задач на дефилирование. Дюпен считает, что понятие о горизонталях было дано Монжем. До 1802 г. применение горизонталей для изображения топографической поверхности во Франции держалось в секрете как военная тайна.

* H. G. Leutner. *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert*, LPZ, 1903. Русский перевод, стр. 335.

44 Как в рассматриваемой задаче, так и в предыдущих и дальнейших Монж при построении линий пересечения кривых поверхностей дает способ построения только случайных точек и не останавливает внимания на построении особенных точек, как-то: границ перехода с видимой части поверхности на скрытую, нижних и верхних точек кривой и др.



Фиг. 6.

45 Гаспар Монж решает приведенную задачу, как и некоторые другие, методом геометрических мест; однако он не дает обобщающего метода и не выделяет его как особенный метод.

В задаче (фиг. 42) поверхность тора он разбивает на четыре различные половины, по две с каждой стороны плоскости, рассекающей поверхность тора по экватору. В настоящее время мы симметричную часть не считаем особой половиной. Следовательно, число различных полов поверхности тора, вместо четырех, сведется к двум.

46 В подстрочном примечании указано, что вершины двух конусов вращения имеют общую вершину в точке А. Это неверно. Надо сказать, что общей их вершиной является нижняя точка стояния аэростата.

⁴⁷ При этих измерениях остается неизвестной разница высот между точкой А и точкой укрепления на земле аэростата. Надо еще измерить расстояние от нижней стояжки его до земной поверхности.

⁴⁸ Жак Вокансон (de Vaucanson) — знаменитый французский механик (1709—1782), искусный в конструировании механизмов точной механики для различных отраслей промышленности; например машина для прядения шелка. В 1746 г. избран членом Парижской академии. Более всего известен придуманными им автоматами: порхающие медные утки, клюющие корм; флейтист, двигающий губами и пальцами.

⁴⁹ Поверхности с ребром возврата были впервые исследованы в 1771 г. Эйлером и Монжем. Последний ввел их позднее также и в начертательную геометрию.

⁵⁰ Монж впервые дал решение поставленного Лагранжем дифференциального уравнения минимальной поверхности в § XX „Application de l'analyse à la géométrie“.* В статье М. Я. Выгодского „Возникновение дифференциалов геометрии“ (стр. 56—57) и в комментариях к книге Монжа (стр. 654) освещается вопрос о роли Менье, талантливого его ученика, в вопросе об исследовании минимальных поверхностей. История развития теории минимальных поверхностей изложена G. Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces, т. I, p. 267) и H. A. Schwartz (Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 168).

⁵¹ Термина „главная кривизна“ Монж нигде не употребляет.

Понятие о линиях кривизны в науку введено впервые Монжем в его статье: „Теория выемок и насыпей“,** в которой он излагает замечательно изящное исследование в отношении проблемы земляных работ, связанное с его главным исследованием о кривизне поверхностей. В своем известном сочинении „О линиях кривизны поверхности эллипсоида“,*** вошедшей в его „Application de l'analyse“ (§ XVI), Монж поставил тогда уравнение для линий кривизны эллипсоида.

⁵² См. „Application de l'analyse“ (§ XXII), „О кривой поверхности, огибающей последовательность сфер переменного радиуса, центры которых расположены на некоторой кривой.“

⁵³ При таких условиях обработки каменной облекается их обтесывание и проверка шнуром и рейкой, а также упрощается их проектирование и изготовление моделей и развертываемых поверхностей.

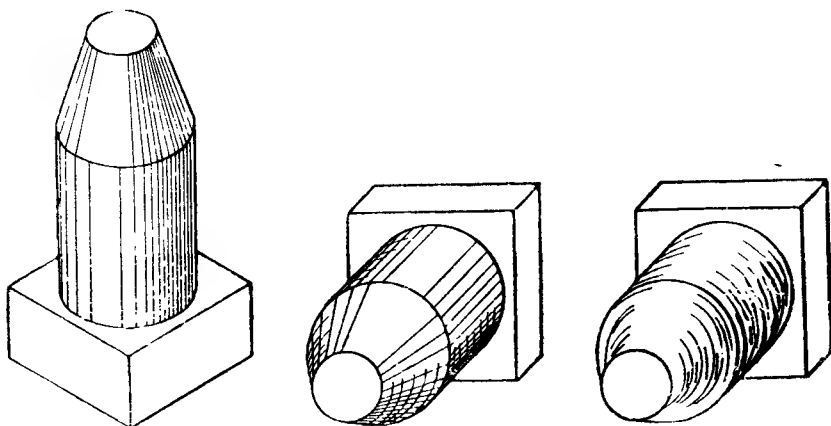
⁵⁴ Поясним эту мысль примерами штриховки, принятой в техниче-

* Русский перевод, стр. 324—337, под редакцией М. Я. Выгодского.

** „Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais“, Mémoire de l'Académie de sciences de Paris, 1781.

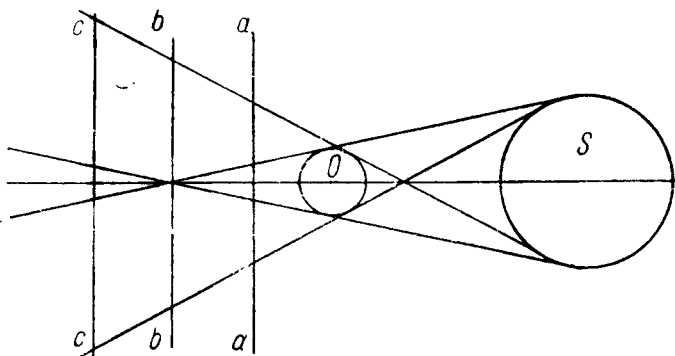
*** „Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde“, Journal de l'école polytechnique, 1796, № 2, p. 145.

ском черчении при изображении конструкций в аксонометрических проекциях (фиг. 7). Цилиндр и конус штрихуются линиями по направлениям их главных кривизн, т. е. по направлению прямолинейных образующих, или же



Фиг. 7.

по окружностям, как линиям пересечения поверхностей конуса и цилиндра плоскостями, перпендикулярными их осям вращения.



Фиг. 8.

55 В издании 1798 года имеются три добавления:

1) О точках пересечения трех цилиндров, имеющих круговые основания (продолжение параграфа 4).

2) Четвертый пример образования кривых поверхностей (продолжение параграфа 12).

3) Определение касательной плоскости к линейчатой поверхности (продолжение § 13).

В других изданиях, так же как и в издании 1811 г., с которого сделан настоящий перевод, эти добавления отсутствуют, как отсутствуют и в данном переводе.

Теория теней

56 М. Бриссон, ученик Политехнической школы, через 29 лет после смерти своего учителя издал извлечение из неизданных лекций Монжа, касающееся теории теней и теории перспективы. Нынешнее преподавание этих разделов начертательной геометрии с методической стороны резко отличается от написанного М. Бриссоном.

57 Подразумевается теория ортогональных проекций.

58 См. предыдущее примечание 57.

59 Это замечание справедливо только по отношению к выпуклому телу и требует особого рассмотрения в случаях, когда поверхность тела имеет, кроме выступающих, также и входящие углы.

60 Характерной особенностью изложения раздела начертательной геометрии, относящегося к теории теней, является то, что автор ограничился в нем только двумя чертежами. Все его рассуждения сводятся только к небольшому числу основных теорем, считая, что их вполне достаточно для конструктивного решения любого практического примера. Повидимому, усвоение теории теней делалось учениками Монжа на практических занятиях с циркулем и линейкой в руках.

61 Последней фразой автор подчеркивает необходимость выбирать тот способ решения, который приводит к получению наиболее точных результатов графических расчетов в инженерном деле.

62 В подлиннике сказано: „La direction de la lumière“.

63 В излагаемой теории теней рассматриваются тени, падающие на горизонтальную плоскость проекций, и не рассматриваются тени, падающие на вертикальную плоскость проекций, как это обычно излагается в современных курсах.

64 Здесь рассмотрена только одна часть явления. Если обратиться к фиг. 8, на которой изображено:

S — солнце,

O — предмет,

то представляется совершенно различная картина падающей тени, в зависимости от того, в каком месте будет находиться поверхность, на которую эта тень падает. Монж рассмотрел случай, когда эта поверхность занимает положение *aa* (фиг. 8). Но если эту поверхность поместить в положение *bb* или *cc*, то картина изменится. Сравните тень от тонкого цилиндра в каждом из этих положений и поверьте на практике, наблюдая тени на земле от телеграфной проволоки.

Теория перспективы

⁶⁵ Метод изложения теории перспективы, так же как и в теории теней, характеризуется краткостью, сжатостью, четкостью научной мысли. Весь курс линейной перспективы заключает в себе только один чертеж и немногие основные теоремы, предоставляя остальное усвоение предмета практике упражнений. Разумеется, Монжу не могли не быть известны большие достижения в эпоху Возрождения и в более позднее время в области практических приемов построения перспективы предметов. Но он отмечает это только одной фразой, предоставляя читателю укрепить свои знания собственной практикой.

⁶⁶ Изложенный способ построения перспективы пирамиды заимствован от Альбрехта Дюрера. В его труде „*Alberti Dureri geometricarum libri*“, изданном в Нюрнберге в 1525 г., помещен чертеж, показывающий способ построения куба. Пример усложнен добавлением теней. Монж разделил чертеж на два самостоятельных, выделив на особый чертеж построение самой картины. Только в этом и различие. Монж оценил мощный гений Дюрера, давшего исходное понятие о перспективе, как о конической проекции, и способ практического выполнения эпюр.

⁶⁷ Автор не рассматривает случая перспективы самого предмета совместно с перспективой его плана, т. е. вторичной конической проекции на плоскости проекций (картине).

⁶⁸ Подразумевается построение перспективы по данным ортогональным проекциям.

⁶⁹ Автор высказал здесь глубокую мысль о том, что *глаз всегда ловит свой луч*, но не приводит, однако, геометрического доказательства.

⁷⁰ Решение этого вопроса и в настоящее время не утратило своего значения.

⁷¹ После текста Монжа в издании 1811 г. имеется приложение, написанное адъюнкт-профессором Политехнической школы М. Гашеттом. Оно касается:

- I. Образования поверхностей и их определения,
- II. Задач на прямую и плоскость,
- III. Плоскостей, касательных к кривым поверхностям.

IV. Пересечения поверхностей,

V. Кривых двойкой кривизны, образованных движением точки по заданному закону,

VI. Решения некоторых задач геометрии.

Текст этого приложения занимает 120 страниц, in 8°, и 11 отдельных таблиц чертежей.

Перевода этого приложения здесь не дается.



ОГЛАВЛЕНИЕ



НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Программа	Стр. 9
---------------------	-----------

Раздел первый

1. Предмет начертательной геометрии	13
2—9. Соображения, по которым определяется положение точки в пространстве. О методе проекций (фиг. 1—3)	—
10. Сравнение начертательной геометрии с алгеброй	27
11—13. Основное положение представления формы и положения поверхностей. Применение и плоскости	28
14—22. Решение некоторых элементарных задач на прямую линию и плоскость (фиг. 4—11)	33

Раздел второй

23—26. О касательных плоскостях и нормалях к кривым поверхностям	45
27—31. Способ построения касательных плоскостей в данных точках кривых поверхностей (фиг. 12—15)	48
32. Условия, определяющие положение плоскости, касательной к любой кривой поверхности; замечания о развертываемых поверхностях	59
33—34. О плоскостях, касательных к поверхностям и проходящих через точки, заданные вне этих поверхностей	62
35—44. О плоскости, касательной к поверхности одного или нескольких шаров. Замечательные свойства круга, шара, конических сечений и кривых поверхностей второго порядка (фиг. 16—22)	65

- 45—47. О плоскости, касательной к поверхностям цилиндрической, конической и поверхности вращения, проведенной через точки, заданные вне этих поверхностей (фиг. 23—25) . . . 81

Раздел третий

48. О пересечении кривых поверхностей. Определение кривых двойкой кривизны 89
- 49—50. Соответствие между операциями в начертательной геометрии и исключением неизвестных в алгебре 90
- 51—56. Общий способ определения проекций линий пересечения поверхностей. Видоизменения этого способа для некоторых частных случаев (фиг. 26) 92
- 57—58. Касательные к линиям пересечения поверхностей 98
- 59—83. Пересечения поверхностей: цилиндрической, конической и т. д. Развертки этих пересечений в тех случаях, когда одна из поверхностей, к которым они принадлежат, развертываемая (фиг. 27—35) 100
- 84—87. Способ Роберваля построения касательной к кривой, заданной законом движения образующей точки. Применение этого способа к эллипсу и к линии пересечения двух эллипсоидов вращения, имеющих общий фокус (фиг. 36—37) . 128

Раздел четвертый

- 88—102. Применение пересечений поверхностей к решению различных задач (фиг. 38—42) 132

Раздел пятый

- 103—109. О кривых плоских и двойкой кривизны, об их эволютах, эвольвентах и радиусах кривизны (фиг. 43—45) 156
- 110—112. О поверхности, являющейся геометрическим местом эволют кривой двойкой кривизны; замечательное свойство эволют, рассмотренных на этой поверхности. Образование любой кривой двойкой кривизны непрерывным движением 163
- 113—124. О кривых поверхностях. Доказательство теоремы: „Каждая поверхность имеет в любой своей точке только две кривизны; каждая кривизна имеет свое собственное направление, свой собственный радиус, а две дуги, по которым эти кривизны измеряются, перпендикулярны друг другу на поверхности (фиг. 46—48) 166

	Стр.
125—129. О линиях кривизны любой поверхности, о ее центрах кривизны и о поверхности, являющейся их геометрическим местом. Применение к делению сводов на клинчатые камни и к искусству гравирования (фиг. 49)	176
130—131. Разрезка камней сводов	180

ТЕОРИЯ ТЕНЕЙ

132. О пользе теней, нанесенных на эпюрах	187
133—135. О построении теней (фиг. 50—52)	189

ТЕОРИЯ ПЕРСПЕКТИВЫ

136—139. Способы изображения предметов в перспективе (фиг. 53) .	212
140—142. Об определении оттенков в изображении предметов и о воздушной перспективе	223
143. Об изменениях цветов при некоторых обстоятельствах . .	238

ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. И. Каргин. Гаспар Монж и его „Начертательная геометрия“ .	245
А. М. Лукомская. Перечень трудов и литературы о жизни и деятельности Гаспара Монжа	258
Примечания	271

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

*

Редактор издательства *Л. П. Пекуровская*
Технический редактор *Р. С. Певзнер*
Корректор *Н. А. Малевич*

*

РИСО АН СССР № 2765. М-06037. Типогр.
заказ № 303. Подписано к печати 26/IX-1947 г.
Печ. л. 18¹/₄ + 2 вклейки. Уч-изд. л. 19.
Тираж 5000 экз.

1-я тип. Издательства Академии Наук СССР
Ленинград. В. О., 9 лин., 12.

С. МОСК

НАЧЕРТА
ТЕЛЬНАЯ
ГЕО
МЕТРИЯ



С. МОСК



2100